

Р. И. Нигматулин

# ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ





Академик

Роберт Искандерович Нигматулин

A handwritten signature in black ink, written in a cursive style, positioned above the printed name.



**Р. И. Нигматулин**

**ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ**



Издано при поддержке  
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации,  
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления  
Российской академии наук (ОЭММПУ РАН),  
Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ),  
Уфимский федеральный исследовательский центр РАН (УФИЦ РАН),  
Правительство Республики Башкортостан (РБ),  
Академия наук Республики Башкортостан (АН РБ),  
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (ИМех УФИЦ РАН)



## Предисловие

Мое знакомство с Робертом Искандеровичем началось после его избрания в 1991 г. академиком РАН. Мы работали по разным специальностям, и я мало разбираюсь в профессиональных тонкостях механики. . .

Постепенно мы сближались и лучше понимали друг друга. Мне становилась все понятнее его гражданская позиция, отношение к экономике и судьбам страны, к технологической структуре производства и геополитике. Р.И. Нигматулин оказался разносторонним ученым, крупным методологом, умеющим применять метод познания к разным наукам. Он обладает колоссальным чувством ответственности, которое для него не лозунг, а сила, определяющая объективную логику общественного прогресса.

Эти и другие, описанные далее события, позволили мне сделать вывод о том, что в лице академика Р.И. Нигматулина мы видим энциклопедиста нового времени. Он яркий представитель столь редко встречающейся сегодня российской интеллигенции. Уважение к прогрессу и любовь к родине лишь подчеркивают его значимость и как ученого, и как личности.

Мне много раз приходилось бывать в Уфе, в том числе совершать туристическую поездку на теплоходе со своими внучками. У меня было и остается много друзей в Башкирии. Побывал я там и по приглашению Роберта Искандеровича, когда он возглавлял Академию наук Республики Башкортостан и Уфимский научный центр РАН. Мне показали много интересного. Выступил я и перед учеными УНЦ РАН и АН РБ. Много с тревогой говорил о России, об отсутствии у нее долгосрочной стратегии, о расслоении граждан на богатых и бедных, о децильном коэффициенте распределения доходов, о доле заработной платы в объеме ВВП, о прогрессивном обложении налогом доходов физических лиц.

Это было общение с выдающимися учеными Башкирии, ответы на их многочисленные вопросы. Академик Р.И. Нигматулин уловил суть проблемы и потом написал профессиональную работу по экономике России. Здесь сказалась его сила овладения методологией научного анализа, имеющей очень много общего в анализе социальных и технических проблем, а также уже названное выше чувстве социальной ответственности.

В 2003 г. Роберт Искандерович опубликовал в журнале «Вопросы экономики» № 3 принципиальную статью «Об оптимальной доле государственных расходов в ВВП и темпах экономического роста». Она была ответом на вышедшую ранее в том же журнале статью помощника Президента России по экономическим вопросам А. Илларионова и его соавтора Н. Пивоваровой «Размеры государства и экономический рост». Это был достаточно мужественный шаг, поскольку советник для того и существует, чтобы влиять на позицию В.В. Путина и принимаемые им решения. Это влияние существует и до сих пор. . .



В статье Р.И. Нигматулина отмечается, что в качестве единственного способа повышения темпов экономического роста А. Илларионов с соавтором предлагают существенное сокращение государственных расходов. Такое положение ошибочно. Темпы экономического роста есть функция многих переменных и факторов. Некоторые из них даже нельзя выразить численно, в частности уровень честности в бизнесе и в государственных органах, национальные традиции, бережливость, самочувствие нации и многое другое. «Такой формальный и упрощенный анализ функции многих переменных при вариации одной переменной без контроля и учета изменения остальных переменных и факторов не позволяет выявлять закономерности. Это стандартная проблема при обработке данных (экспериментов) во всех науках».

Он отмечает и конкретные просчеты в критикуемой им статье. Причем речь идет не о некоем «абстрактном» государстве, а о реалиях современной России. Поддерживая позицию ведущих российских экономистов, Р.И. Нигматулин выступает за повышение доли оплаты труда до 50%, а потом и до 60% в объеме ВВП.

Действительно, низкая заработная плата – главный тормоз научно-технического прогресса. Она ориентирует на использование примитивного низкоквалифицированного труда и противоречит курсу на инновационное развитие экономики.

Что касается России, то в ней значительная доля природной ренты вместо того, чтобы идти на развитие производительных сил, присваивается современными олигархами, которые все это тратят на предметы роскоши или вывозят за рубеж. И далее Р.И. Нигматулин пишет: «Сегодня в конкурентной борьбе на мировом рынке Россия имеет шанс завоевать достойное место только в секторе высокотехнологичной продукции с большой долей интеллектуальных затрат». Если она этого не сделает, то «потеряет и шанс на вход на мировой рынок, и статус великой державы, и свой привычный уровень жизни, и свою цивилизацию».

Сегодня это так же верно, как и семь лет назад, когда была написана статья! Далее Р.И. Нигматулин утверждает: «Своеобразие многообразных связей и условий определяет для каждой страны свою оптимальную долю государственных расходов в ВВП. Универсальных решений здесь нет. Кстати, в северных странах (Канада, Норвегия, Швеция, Финляндия) она всегда высока». В 2007 г. вторым изданием вышла книга «Как обустроить экономику и власть России: анализ инженера и математика». В ней сказано, что у нас в стране по-прежнему власть «все знает сама, не опирается на научный анализ, не осознает и игнорирует законы экономики, пренебрегает мнением специалистов». Поэтому в России (и это сказано достаточно жестко) «нужно сменить курс и начинать создавать новый экономический и государственный порядок. А это значит, что в руководстве нужны новые люди: с современным мировоззрением, опирающиеся на науку, знающие основы современной экономики».

Мы встречались с Робертом Искандеровичем на многих собраниях и обсуждениях, где я неизменно замечал широту его мышления и профессиональное знание проблем. Были мы и на обсуждении проблем современного экономического кризиса, проводимом на круглом столе под руководством Ю. М. Лужкова. В дискуссии выступали в основном экономисты. Но потом Р.И. Нигматулин выступил как «технар», рассказал о фундаментальных причинах, заложенных в развитии производительных сил. Его речь оказалась весьма заметным явлением и, я бы сказал, приземленным к реальной ситуации в стране.

За многие годы нашего знакомства Роберт Искандерович узнал, что я не только писатель, но и читатель. Поэтому он регулярно присылает мне свои публикации. И я действительно читаю: и профессиональные работы по атомной энергетике, и многочисленные воспоминания о своей семье и близких людях. Это удивительно живые, образные рассказы, которые раскрывают душу автора, будят воспоминания и сопоставления. Мне тоже доставило большую радость и потребовало немалого труда написать книгу «Моя родословная», где я проследил (по ревизским сказкам) семью своих предков с конца XVIII века до наших дней.

Завтрашний день России неразрывно связан с именами выдающихся деятелей страны, ее крупных ученых, подобных Р.И. Нигматулину, а также с тем, что идущее им на смену поколение будет умнее старших. Только тогда в стране будет не регресс, а прогресс.

**Леонид Иванович Абалкин**  
академик РАН

(Из книги «Ученый нашего времени глазами современников», стр. 195–197)



## **13 статей академика Р. И. Нигматулина** *(авторское предисловие)*

Представленные в этом юбилейном сборнике мои научные статьи отобраны мной. Они расположены в хронологическом порядке и не представлены в моих книгах «Основы механики гетерогенных сред» (1978) и двухтомнике «Динамика многофазных сред» (1987), который был переведен в США. Все они опубликованы с 1965 по 2005 годы и не представлены на открытых полках библиотек. Они в библиотечных архивах. Хотя они не стали самыми цитируемыми, но они стали импульсом для последующих моих с моими более молодыми коллегами публикаций. Все отобранные публикации занимают особое место в «моей истории».

Статьи [1, 2] – мои первые публикации, и они представляют мои студенческие работы – курсовую, представленную в 1964 г., и дипломную, представленную в 1965 г., на мехмате МГУ им. М.В. Ломоносова. Кстати, моя дипломная работа в МВТУ им. Баумана (1963) была посвящена авиационному двигателю с атомным реактором. Конечно, эта разработка не могла быть предметом для публикации в то время.

Статья [10] посвящена тепловой аномалии горы Янгантау и написана с уфимскими геологами.

Статья [12] посвящена важной проблеме экономической теории, в которой подвергнута критике программная статья советника Президента РФ. Эта статья получила высокую оценку академиков Л.И. Абалкина и Д.С. Львова.

Все остальные публикации юбилейного сборника связаны с механикой и теплофизикой многофазных сред.

Особое место среди них занимает статья [7], которая является текстом 1-ой (и единственной) лекции на открытии II Международной конференции по многофазным потокам в Киото (Япония, 2005). Почетное право для такой лекции было предоставлено мне специальным решением оргкомитета. Ее слушали около 1000 человек, среди которых были члены правительства Японии.

## Список литературы

- [1] Нигматулин Р.И. Плоский сильный взрыв на границе двух идеальных калорически совершенных газов // Вестник Московского университета, Математика и Механика. 1965. № 1. С. 83–87.
- [2] Нигматулин Р.И. Сходящиеся цилиндрические и сферические детонационные волны // Прикладная математика и механика (ПММ). 1967. Т. 31, № 1. С. 158–163.
- [3] Нигматулин Р.И. Модель движения и ударные волны в двухфазных твердых телах с фазовыми переходами // Прикладная и механика и техническая физика (ПМТФ). 1970. № 1. С. 88–95.
- [4] Нигматулин Р.И., Холин Н.Н. К модели упруго-пластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования // Механика твердого тела (МТТ), Известия АН СССР. 1974. № 4. С. 131–146.
- [5] Нигматулин Р.И., Шагиев Р.Г., Шагапов В.Ш., Валявин Г.Г., Фрязинов В.В., Нигматулин Б.И. Математическое моделирование в гидравлическом приближении газожидкостных потоков с химическими реакциями и анализ процесса нагрева нефтяного сырья в трубчатых печах // Доклады АН СССР (ДАН). 1977. Т. 237, № 6, С. 1311–1314.
- [6] Нигматулин Р.И., Пыж В.А. Усиление ударных волн в бентонитовых суспензиях // Доклады АН СССР (ДАН), 1986. Т. 286, № 1. С. 70–73.
- [7] Nigmatulin R.I. Some Fundamentals and Applications, Paradoxes, and Myths in Mechanics of Multiphase Flow // Proc. of the 2-nd Int. Conf. on Multiphase Flow, Vol. 1 (ed. T. Fukano et al), Kyoto, 1995. Pp. PL1-1–PL1-16.
- [8] Nigmatulin R.I. Drift flux model as approximation of two fluid model for two phase dispersed and slug flow in tube // Proc. of the 7-th Nuclear Thermo-Hydraulics Conf. (NURETH-7), Vol. 1, 1995. Pp. 141–165.
- [9] Нигматулин Р.И., Шагапов, В.Ш., Сыртланов, В.Р. Автомодельная задача для разложения газогидрата в пористой среде под действием нагрева и депрессии // Прикладная механика и техническая физика (ПМТФ). 1998. Т. 39, № 3, С. 111–118.
- [10] Нигматулин Р.И., Казанцева Т.Т., Камалетдинов М.А., Казанцев Ю.В. Физическая природа термической аномалии горы Янгантау в Южном Урале // Доклады РАН. 1998. Т. 362, № 6. С. 807–809.
- [11] Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Vakhitova N.K., Lahey R.T. On the forced oscillations of a small gas bubble in a spherical liquid filled flask // Journal of Fluid Mechanics. 2000. Vol. 414. Pp. 47–73.
- [12] Нигматулин Р.И. Об оптимальной доле государственных расходов в ВВП и темпах экономического роста // Вопросы экономики. 2003. № 3. С. 125–131.
- [13] Nigmatulin R.I. Nano-scale thermonuclear fusion in imploding vapor bubbles // Nuclear Engineering and Design. 2005. Vol. 235. Pp. 1079–1091.



*Вестник*  
**МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**  
 № 1 — 1965

Р. И. НИГМАТУЛИН

**ПЛОСКИЙ СИЛЬНЫЙ ВЗРЫВ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ИДЕАЛЬНЫХ  
 КАЛОРИЧЕСКИ СОВЕРШЕННЫХ ГАЗОВ**

Пусть в правом полупространстве находится газ 1, а в левом — газ 2. В плоскости, разделяющей газы, происходит взрыв, то есть выделяется энергия  $E_0$ .

Решение ищем в виде двух ударных волн, идущих вправо и влево при следующих обычных допущениях:

- 1) энергия взрыва выделяется мгновенно;
- 2) взрыв плоский, точечный;
- 3) взрыв сильный, то есть значением обеих давлений в обоих покоящихся газах можно пренебречь по сравнению с давлением в возмущенной среде;
- 4) движение адиабатическое (сохраняется энтропия в частице).

В результате этих допущений движение будет определяться следующими параметрами:

$$E_0, \rho_{11}, \rho_{21}, \gamma_1, \gamma_2, r, t, \quad (1)$$

где  $\rho_{11}$  и  $\rho_{12}$  — начальные плотности соответственно правого и левого газов\*,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — показатели адиабаты соответственно правого и левого газов,  $r$  — расстояние до места взрыва,  $t$  — время.

Из анализа размерностей следует, что движение в этой постановке будет автомодельным с единственным независимым безразмерным переменным

$$\Pi = r \left( \frac{\rho_{11}}{E_0 t^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2)$$

Для приведения задачи к более симметричному виду введем аналогичное переменное (равное  $\Pi$  с точностью до постоянного множителя, своего для каждого газа 1 и 2):

\*  $f_{ij}$  при  $i=1$  относятся к правому газу, а  $i=2$  соответственно к левому;  $j=1$  относится к невозмущенному газу, а  $j=2$  показывает, что значение  $f$  берется на ударной волне.

$$\lambda = \begin{cases} r \cdot \left( \frac{\rho_{11}}{E_1 t^2} \right)^{\frac{1}{3}} & \text{для правого газа,} \\ r \cdot \left( \frac{\rho_{21}}{E_2 t^2} \right)^{\frac{1}{3}} & \text{для левого газа.} \end{cases} \quad (3)$$

Значения  $E_1$  и  $E_2$  выберем позднее. Как уже указывалось, решение ищем в виде двух ударных волн, идущих в разные стороны, для чего будем стыковать на контактной поверхности (поверхности, разделяющей газы) решения, полученные Л. И. Седовым для аналогичной, но симметричной задачи (см. [1] и [2]).

Из анализа размерностей имеем следующие законы движения обеих ударных волн:

$$r_{12} = \lambda_{12} \cdot \left( \frac{E_1 t^2}{\rho_{11}} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$r_{22} = \lambda_{22} \cdot \left( \frac{E_2 t^2}{\rho_{21}} \right)^{\frac{1}{3}},$$

где  $\lambda_{12}$  и  $\lambda_{22}$  — произвольные постоянные.

Положим  $\lambda_{12} = \lambda_{22} = 1$  за счет выбора  $E_1$  и  $E_2$ . Таким образом,

$$r_{i2} = \left( \frac{E_i t^2}{\rho_{i1}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4)$$

$C_i$  — скорость движения ударной волны ( $i = 1, 2$ ):

$$c_i = \frac{dr_{i2}}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{E_i}{\rho_{i1}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{-\frac{1}{3}}. \quad (5)$$

Из условий на сильных разрывах имеем (с учетом  $\rho_{i1} \approx 0$ )

$$v_{i2} = \frac{4}{3(\gamma_i + 1)} \cdot \left( \frac{E_i}{\rho_{i1}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{-\frac{1}{3}}, \quad (6)$$

$$\rho_{i2} = \frac{\gamma_i + 1}{\gamma_i - 1} \rho_{i1}, \quad (7)$$

$$p_{i2} = \frac{8\rho_{i1}}{9(\gamma_i + 2)} \cdot \left( \frac{E_i}{\rho_{i1}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{-\frac{2}{3}}. \quad (8)$$

В качестве безразмерных переменных возьмем отношения искомых функций  $v$ ,  $\rho$ ,  $p$  к их значениям на соответствующей ударной волне:

$$\bar{v} = \frac{v}{v_{i2}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{i2}}; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{i2}}. \quad (9)$$

Кратко изложим ход решения Л. И. Седова применительно к нашей задаче (см. [2]).



Переходя в уравнениях одномерного адиабатического движения калорически совершенного газа

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma p \cdot \frac{\partial v}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

к безразмерным переменным, получим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений (для правого и левого газов):

$$\left. \begin{aligned} \left( \bar{v} - \frac{\gamma_i + 1}{2} \lambda \right) \bar{\rho} \bar{v}' + \frac{\gamma_i - 1}{2} \bar{p}' - \frac{\gamma_i + 1}{4} \bar{v} \bar{\rho}' &= 0, \\ \left( \bar{v} - \frac{\gamma_i + 1}{2} \lambda \right) \bar{\rho}' + \bar{\rho} \bar{v}' &= 0, \\ \left( \bar{v} - \frac{\gamma_i + 1}{2} \lambda \right) \bar{p}' + \gamma_i \bar{\rho} \bar{v}' - \frac{\gamma_i + 1}{2} \bar{p} \bar{\rho}' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{и граничные условия } \bar{v}(1) = 1; \bar{\rho}(1) = 1; \bar{p}(1) = 1. \quad (12)$$

Система уравнений (11) имеет два первых интеграла:

$$\frac{2}{\gamma_i + 1} \left( \frac{\gamma_i + 1}{2} - \frac{\bar{v}}{\lambda} \right) \bar{p} \lambda = \bar{\rho}^{\gamma_i - 1}, \quad (13)$$

$$\gamma_i \bar{p} \left( \frac{\bar{v}}{\lambda} - \frac{\gamma_i + 1}{2\gamma_i} \right) = \bar{\rho} \bar{v}^2 \left( \frac{\gamma_i + 1}{2} - \frac{\bar{v}}{\lambda} \right). \quad (14)$$

Делая замену переменных

$$\bar{v} = \lambda F \quad (15)$$

и решая систему, получим

$$\lambda = F^{-\frac{2}{3}} \left[ 2 \left( \frac{3}{2} - F \right) \right]^{-\beta_{i1}} \left[ \frac{2\gamma_i}{\gamma_i - 1} \left( F - \frac{\gamma_i + 1}{2\gamma_i} \right) \right]^{\beta_{i2}}, \quad (16)$$

$$\bar{v} = F^{\frac{1}{3}} \left[ 2 \left( \frac{3}{2} - F \right) \right]^{-\beta_{i1}} \left[ \frac{2\gamma_i}{\gamma_i - 1} \left( F - \frac{\gamma_i + 1}{2\gamma_i} \right) \right]^{\beta_{i2}}, \quad (17)$$

$$\bar{\rho} = \left[ \frac{2\gamma_i}{\gamma_i - 1} \left( F - \frac{\gamma_i + 1}{2\gamma_i} \right) \right]^{\beta_{i3}} \left[ 2 \left( \frac{3}{2} - F \right) \right]^{\beta_{i4}} \left[ \frac{2}{\gamma_i - 1} \left( \frac{\gamma_i + 1}{2} - F \right) \right]^{\beta_{i5}}, \quad (18)$$

$$p = F^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{2}{\gamma_i - 1} \left( \frac{\gamma_i + 1}{2} - F \right) \right]^{1 - \beta_{i5}} \left[ 2 \left( \frac{3}{2} - F \right) \right]^{\beta_{i4} - 2\beta_{i1}}, \quad (19)$$

$$\beta_{i1} = \frac{5\gamma_i - 4}{3(2\gamma_i - 1)}, \quad \beta_{i2} = \frac{\gamma_i - 1}{2\gamma_i - 1}, \quad \beta_{i3} = \frac{1}{2\gamma_i - 1}, \quad (20)$$

$$\beta_{i4} = \frac{3\beta_{i1}}{2 - \gamma_i}, \quad \beta_{i5} = \frac{2}{2 - \gamma_i}.$$

Покажем, что при  $\lambda=0$  будет  $\bar{v}=0$ . Допустим противное. Так как скорости между двумя ударными волнами меняются непрерывно (на

контактной поверхности нет скачка скорости и давления), а на ударных волнах скорости имеют разные знаки, то существует сечение  $\lambda_0$ , где  $\bar{v}=0$ . По предположению,  $\lambda_0 \neq 0$ , следовательно, так как  $\bar{v}=\lambda F$ ,  $F_0=0$ . Но этому  $F_0$  соответствует (см. (16))  $\lambda_0 = \infty$ . Получили противоречие тому факту, что между двумя ударными волнами ( $\lambda < 1$ ) обязательно должно быть сечение с нулевой скоростью.

То обстоятельство, что в начале координат скорость равна нулю при  $t > 0$ , показывает, что сопрягать решения Л. И. Седова можно только в случае, если контактная поверхность неподвижна.

Если ее сделатьдвигающейся, например влево, считая, что она отошла от начала координат при  $t=0$ , когда имеется особенность, то, так как через сечение  $r=0$  нет перетекания газа, ибо там  $v=0$ , имеем, что между контактной поверхностью и началом координат будет находиться фиксированное, ненулевое количество правого газа. Но из начальных размерных параметров нельзя составить параметра с размерностью массы.

### Сопряжение решений

На контактной поверхности, так как она может двигаться только вместе с частицами, должны быть непрерывны скорость и давление.

Непрерывность скорости уже обеспечена. Из условия непрерывности давления имеем

$$\bar{p}(\gamma_1, 0) \cdot p_{12}(t) = \bar{p}(\gamma_2, 0) \cdot p_{22}(t). \quad (21)$$

Подставляя сюда  $p_{i2}$  из (8), получим

$$\frac{\bar{p}(\gamma_1, 0)}{\gamma_1 + 1} \cdot \frac{1}{\rho_{11}^3} \cdot E_1^2 = \frac{\bar{p}(\gamma_2, 0)}{\gamma_2 + 1} \cdot \frac{1}{\rho_{21}^3} E_2^2. \quad (22)$$

из (19)

$$\bar{p}(\gamma_i, 0) = \left( \frac{\gamma_i + 1}{\gamma_i} \right)^{1-\beta_{i5}} \left( \frac{\gamma_i + 1}{2\gamma_i} \right)^3 \left( \frac{2\gamma_i - 1}{\gamma_i} \right)^{\beta_{i4}-\beta_{i1}}. \quad (23)$$

Кроме того, запишем уравнение баланса энергии, учитывая, что внутренней энергией невозмущенного газа по сравнению с внутренней энергией возмущенного газа можно пренебречь

$$E_0 = \int_0^{r_{12}} \left( \frac{p}{\gamma_1 - 1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) dr + \int_0^{r_{22}} \left( \frac{p}{\gamma_2 - 1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) dr. \quad (24)$$

Приводя это уравнение к безразмерным переменным, получим

$$E_0 = \frac{8E_1}{9(\gamma_1^2 - 1)} \int_0^1 [\bar{p}(\gamma_1, \lambda) + \bar{p}(\gamma_1, \lambda) \bar{v}^2(\gamma_1, \lambda)] d\lambda + \frac{8E_2}{9(\gamma_2^2 - 1)} \int_0^1 [\bar{p}(\gamma_2, \lambda) + \bar{p}(\gamma_2, \lambda) \bar{v}^2(\gamma_2, \lambda)] d\lambda. \quad (25)$$

Обозначим

$$\left( \frac{\bar{p}(\gamma_i, 0)}{\gamma_i + 1} \right)^{\frac{3}{2}} = \pi(\gamma_i), \quad (26)$$



$$\frac{8}{9(\gamma_i^2 - 1)} \int_0^1 [\bar{p}(\gamma_i, \lambda) + \bar{\rho}(\gamma_i, \lambda) \bar{v}^2(\gamma_i, \lambda)] d\lambda = \alpha(\gamma_i). \quad (27)$$

Значения  $\alpha(\gamma)$  и  $p(\bar{\gamma}_i, 0)$  (см. [2] и [3]).

Таким образом, для определения  $E_1$  и  $E_2$  имеем систему:

$$\left. \begin{aligned} \pi(\gamma_1) \sqrt{\rho_{11}} E_1 - \pi(\gamma_2) \sqrt{\rho_{21}} E_2 &= 0. \\ \alpha(\gamma_1) E_1 + \alpha(\gamma_2) E_2 &= E_0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Отметим, что  $E_{0i} = \alpha(\gamma_i) \cdot E_i$  — энергия взрыва, ушедшая соответственно вправо и влево. Таким образом, нам удалось определить распределение энергии, ушедшей вправо и влево.

Для выявления основных закономерностей рассмотрим случай  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Тогда

$$\frac{E_{01}}{E_{02}} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_{12}}{r_{22}} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\rho_{21}}{\rho_{11}}}.$$

Энергия взрыва при  $\gamma_1 = \gamma_2$  распределяется обратно пропорционально корню квадратному из отношения плотностей.

Отсюда можно найти пределы применимости данного решения. Если, допустим, слева находится газ с намного меньшей плотностью по сравнению с правым газом, то из нашего решения следует, что вправо пойдет малая доля энергии. В результате чего для правого газа может не выполняться основное допущение сильного взрыва (значением давления в покоящемся газе можно пренебречь по сравнению с давлением в возмущенном газе), то есть полученное решение не будет реализовывать допущение, на основе которого оно получено. Чем больше энергия взрыва, тем для более разных плотностей можно использовать данное решение.

Работа выполнена под руководством проф. Х. А. Рахматулина.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
2. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. Физматгиз, 1961.
3. Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шароватова К. В. Таблицы газодинамических функций начальной стадии точечного взрыва. М., 1963.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию  
30. 5 1963 г.

Институт механики

R. I. Nigmatulin

#### A STRONG PLANE EXPLOSION ON THE BOUNDARY OF TWO IDEAL CALORICALLY PERFECT GASES

The paper presents the solution of the automodel problem of a strong explosion along the plane dividing two different gases by the method of coupling solutions devised by L. I. Sedov. The plane dividing the gases is shown to be stationary. The energy distribution in both directions is assessed.

## СХОДЯЩИЕСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ДЕТОНАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Р. И. Нигматулин

(Москва)

§ 1. Рассмотрим сферические и цилиндрические детонационные волны, сходящиеся соответственно к точке или к оси симметрии. Принимаем обычные допущения:

1) детонационная волна — сильная, т. е. значениями давления и внутренней энергии в невозмущенной среде можно пренебречь по сравнению с их значениями в возмущенном газе;

2) при прохождении ударной волны через вещество мгновенно выделяется энергия  $Q$ ,  $\text{м}^2/\text{сек}^2$  (величина  $Q$  отнесена к единице массы);

3) процесс в возмущенной среде — политропический с показателем  $\gamma$ .

Из условий сохранения массы, количества движения и энергии на детонационном скачке [1,2] имеем:

$$v_2 = \beta D, \quad p_2 = \beta \rho_1 D^2, \quad \rho_2 = \rho_1 / (1 - \beta) \quad (1.1)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma + 1} \left\{ 1 + \left[ 1 - 2(\gamma - 1)(\gamma + 1) \frac{Q}{D^2} \right]^{1/2} \right\} = \frac{\alpha}{\gamma + 1} \quad (1.2)$$

Уравнения одномерного движения газа в переменных Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\nu \rho v}{r} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\gamma \nu p v}{r} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\nu = 0$  в случае плоской,  $\nu = 1$  — цилиндрической,  $\nu = 2$  — сферической симметрии.

§ 2. Рассмотрим случай, когда сферический или цилиндрический фронт детонации сходится из бесконечности по закону

$$r_2 = a_n (-t)^n \quad (2.1)$$

Движение определяется параметрами  $a_n$ ,  $\rho_1$ ,  $r$ ,  $t$ ,  $\gamma$  и  $\nu$ . Из анализа размерностей [3] следует, что в этой постановке движение будет автомодельным с единственным независимым безразмерным переменным

$$\lambda = r/r_2(t) \quad (2.2)$$

В качестве безразмерных функций возьмем отношение искомых функций  $v$ ,  $\rho$ ,  $p$  к их значениям на детонационном фронте

$$-\omega(\lambda) = \frac{v}{v_2}, \quad \delta(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_2}, \quad \pi(\lambda) = \frac{p}{p_2} \quad (2.3)$$

$$D = \frac{dr_2}{dt} = -na_n(-t)^{n-1} \quad (2.4)$$

Из условий на детонационном фронте (1.1), (1.2)

$$-v_2 = a_n \beta n (-t)^{n-1}, \quad \rho_2 = \rho_1 / (1 - \beta), \quad p_2 = \rho_1 a_n^2 \beta n^2 (-t)^{2(n-1)} \quad (2.5)$$

Далее будем считать, что в процессе схождения  $\beta = \text{const}$ . Это условие исследуется ниже. Переходя к безразмерным переменным (2.2), (2.3) в уравнениях (1.3), получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \delta \omega' (\lambda \mp \beta \omega) \mp (1 - \beta) \pi' - \delta \omega (n - 1)/n &= 0 \\ \delta' (\lambda \mp \beta \omega) \mp \beta \delta \omega' \mp \nu \beta \delta \omega / \lambda &= 0 \\ \pi' (\lambda \mp \beta \omega) \mp \beta \gamma \lambda \omega' - 2\pi (n - 1)/n \mp \nu \beta \gamma \pi \omega / \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

С граничными условиями

$$\omega(1) = -1, \quad \delta(1) = 1, \quad \pi(1) = 1 \quad (2.7)$$

О том, как можно определить  $n$ , будет рассмотрено в § 4.

§ 3. Когда фронт детонации сходится из бесконечности, движение определяется параметрами  $Q$ ,  $\rho_1$ ,  $r$ ,  $t$ ,  $\gamma$  и  $\nu$ .

Из соображений размерностей фронт детонации должен сходиться с постоянной скоростью  $r_2 = a_1 (-t)$ , т. е. в уравнении (2.1) надо положить  $n = 1$ , где  $a_1 \sim \sqrt{VQ}$ .

Очевидно, что в этом случае  $\beta = \text{const}$ . Уравнения (2.6) запишутся в виде (для  $n = 1$ )

$$\begin{aligned} \delta \omega' (\lambda \mp \beta \omega) \mp (1 - \beta) \pi' &= 0 \\ \delta' (\lambda \mp \beta \omega) \mp \beta \delta \omega' \mp \nu \beta \delta \omega / \lambda &= 0 \\ \pi' (\lambda \mp \beta \omega) \mp \beta \gamma \lambda \omega' \mp \nu \beta \gamma \pi \omega / \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Граничные условия будут

$$\omega(1) = -1, \quad \delta(1) = 1, \quad \pi(1) = 1 \quad (3.2)$$

Очевидно, что

$$\pi = \delta^\gamma \quad (3.3)$$

будет интегралом системы (3.1) (аналогичен интегралу изэнтропичности).

Подставляя (3.3) в (3.1), получим систему относительно  $\delta$  и  $\omega$

$$\begin{aligned} \delta (\lambda \mp \beta \omega) \omega' \mp \gamma (1 - \beta) \delta^{\gamma-1} \delta' &= 0 \\ \beta \delta \omega' \mp (\lambda \mp \beta \omega) \delta' \mp \nu \beta \delta \omega / \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Разрешая систему (3.4) относительно  $\delta'$  и  $\omega'$ , имеем

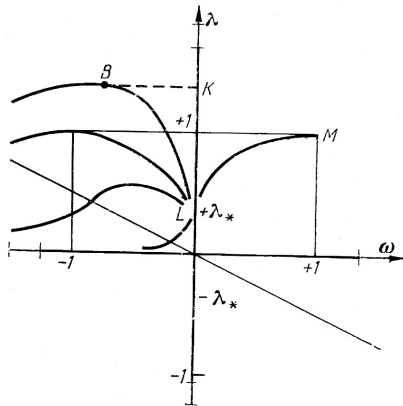
$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{\nu \beta \gamma (1 - \beta) \delta^\gamma \omega}{\lambda [\delta (\lambda + \beta \omega)^2 - \gamma \beta (1 - \beta) \delta^\gamma]}, \quad \frac{d\delta}{d\lambda} = - \frac{\nu \beta \gamma \delta^2 \omega (\lambda + \beta \omega)}{\lambda [\delta (\lambda + \beta \omega)^2 - \gamma \beta (1 - \beta) \delta^\gamma]} \quad (3.5)$$

Кроме того

$$\delta^{\gamma-2} \frac{d\delta}{d\omega} = - \frac{\lambda + \beta\omega}{\gamma(1-\beta)} \quad (3.6)$$

О поле интегральных кривых системы (3.5) (фиг. 1) можно сказать следующее.

1. Линии  $\lambda = 0$  и  $\omega = 0$  являются интегральными кривыми;
2. Вдоль линии  $\lambda + \beta\omega = 0$  имеем



Фиг. 1

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d\delta}{d\omega} = 0 (\delta = \text{const}), \quad \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{\nu}{\beta} \quad (3.7)$$

3. Вдоль линии  $\omega = 0$  имеем

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = 0, \quad \delta = \delta_0 = \text{const} \quad (3.8)$$

Легко видеть, учитывая (3.6) и граничные условия (3.2),

$$\delta_0^{\gamma-1} = \frac{2 - \beta(\gamma + 1)}{2\gamma(1 - \beta)} \quad (3.9)$$

На линии  $\omega = 0$  имеем особую точку с координатой

$$\lambda_*^2 = \gamma\beta(1 - \beta)\delta_0^{\gamma-1}.$$

Учитывая (1.2) и (3.9)

$$\lambda_*^2 = \frac{\alpha(2 - \alpha)}{2(\gamma + 1)} \quad (3.10)$$

Отсюда видно, что даже подбором  $\alpha$  (отказываясь от условия Чепмена—Жуге), нельзя сделать так, чтобы особая точка имела координату  $\lambda_* > 1$ .

Из поля интегральных кривых (фиг. 1) видно, что из точки  $\lambda = 1, \omega = -1, \delta = 1$  в бесконечность по  $\lambda$  не уходит ни одна интегральная кривая (скачок типа ВК дает скачок разряжения и вводить такой дополнительный скачок для получения решения нельзя).

Таким образом доказано, что не существует автомодельного решения в случае схождения детонационных волн с постоянной скоростью (изоэнтропический случай), даже если отказаться от условия Чепмена—Жуге.

Этот же результат получен Л. Д. Ландау и К. П. Станюковичем для режима Чепмена—Жуге ([4]).

Для расходящихся же с постоянной скоростью детонационных волн решение существует (кривая LM), впервые полученное Я. Б. Зельдовичем ([1, 2]).

§ 4. Соображения, размерностей не помогают в определении закона схождения детонационного фронта. Вернемся к формуле (1.2), в которой  $\alpha = 2$  соответствует ударной волне без выделения энергии ( $Q = 0$ ),  $\alpha = 1$  соответствует режиму детонации Чепмена—Жуге, когда волна идет по характеристике в возмущенном газе.

В тех случаях, когда  $D^2 \gg Q$  (внутренняя энергия вещества на детонационном фронте гораздо больше выделяемой химической энергии, что соответствует достаточно ускоренной детонационной волне), можно полагать  $\alpha = 2$  и использовать автомодельное решение Гудерлея—Ландау—Станюковича [4].

Рассмотрим другой крайний случай (физически нереальный), когда в процессе схождения  $\alpha = 1$ , т. е. обеспечивается режим Чепмена—Жуге, и детонационная волна идет по характеристике. Для этого необходимо, чтобы выделяемая на фронте энергия  $Q$  была пропорциональна  $D^2$  (или  $p_2$  и  $T_2$ ), т. е.  $Q$  должна увеличиваться по мере ускорения фронта детонации (внутренняя энергия вещества на детонационном фронте одного порядка с выделяемой химической энергией  $Q$ ).

Если, используя решения Гудерлея—Ландау—Станюковича,  $Q$  не учитывается, то теперь  $Q$  учтем как бы с избытком.



Таким образом, закон схождения фронта будем искать как характеристику, разделяющую возмущенную и невозмущенную среды.

Воспользуемся уравнениями непрерывного одномерного движения в переменных Лагранжа

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rho_1 = \frac{\rho(1+u_r)}{1+u/r}, \quad \frac{p}{\rho_2} = \left( \frac{\rho}{\rho_2} \right)^\gamma \quad (4.1)$$

Здесь  $u$  — смещение частицы. Условия на детонационной волне в режиме Чепмена — Жуге

$$v_2 = \frac{D}{\gamma+1}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_1(\gamma+1)}{\gamma}, \quad p_2 = \frac{\rho_1 D^2}{\gamma+1} \quad (4.2)$$

Первое уравнение (4.1) представим в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(r, u, u_r) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b(r, u, u_r) \quad (4.3)$$

Тогда уравнение характеристик и условия на них будут

$$dr = \pm a dt, \quad du_t = \pm a du_r + b dt \quad (4.4)$$

Из третьего уравнения (4.1), используя второе и соотношения (4.2), получим

$$p = \frac{1}{\gamma+1} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^\gamma \rho_1 \frac{D^2}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\gamma\gamma}} \quad (4.5)$$

Дифференцируя (4.5) и подставляя в первое уравнение (4.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\gamma+1} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^\gamma \left\{ \frac{\gamma D^2}{(1+u_r)^{\gamma+1} (1+u/r)^{\gamma\gamma}} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \right. \\ \left. + \frac{\nu\gamma D^2}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\nu\gamma+1}} \frac{u_r r - u}{r^2} - \frac{2D}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\nu\gamma}} \frac{dD}{dr} \right\} \quad (4.6) \end{aligned}$$

Сравнивая (4.6) и (4.3), получим

$$a^2(r, u, u_r) = \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^{\gamma+1} \frac{D^2}{(1+u_r)^{\gamma+1} (1+u/r)^{\nu\gamma}} \quad (4.7)$$

$$b(r, u, u_r) = \frac{1}{\gamma+1} \left( \frac{1}{\gamma+1} \right)^\gamma \left[ \frac{\nu\gamma D^2 (u_r r - u)}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\nu\gamma+1} r^2} - \frac{2D}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\nu\gamma}} \frac{dD}{dr} \right] \quad (4.8)$$

В принятых выше предположениях детонационная волна идет по характеристике, поэтому

$$a_2(r) = a[r, 0, u_{r2}(r)] = D(r) \quad (4.9)$$

Отсюда, учитывая (4.7), находим

$$u_{r2} = -1/(\gamma+1) \quad (4.10)$$

Из (4.8) и (4.10) получим

$$b_2(r) = b[r, 0, u_{r2}] = - \frac{\nu\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{D^2}{r} - \frac{2}{\gamma+1} D \frac{dD}{dr} \quad (4.11)$$

Для характеристики, ограничивающей покоящийся газ

$$u_{t2} dt + u_{r2} dr = du = 0, \quad \text{или} \quad u_{t2} \pm a_2 u_{r2} = 0 \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.4) и учитывая (4.10), имеем

$$\mp u_{r2} da_2 = b_2 dt \quad (4.13)$$

Учитывая (4.9)—(4.11), и (4.4), получим, что вдоль искомой характеристики

$$3 \frac{dD}{D} + \frac{\nu\gamma}{\gamma+1} \frac{dr}{r} = 0 \quad (4.14)$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что скорость, направленная к центру, считается отрицательной, получим

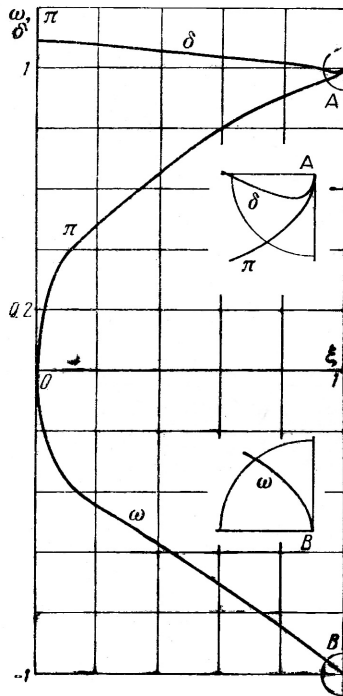
$$|D| = \frac{A}{r_2^m} \quad \left( m = \frac{\nu\gamma}{3(\gamma+1)} \right), \quad \text{или} \quad - \frac{dr_2}{dt} = \frac{A}{r_2^m}$$

Интегрируя последнее уравнение при условии, что  $r_2 = 0$  при  $t = 0$ , имеем

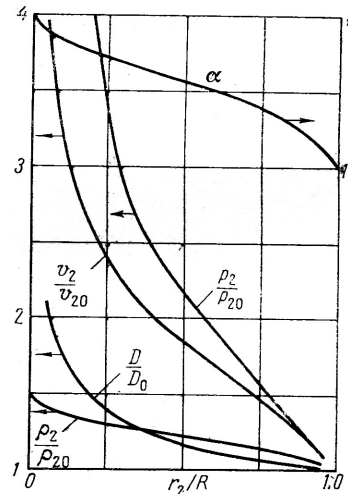
$$r_2 = a_n (-t)^n \quad \left( n = \frac{1}{m+1} = \frac{3(\gamma+1)}{3(\gamma+1) + \nu\gamma} \right) \quad (4.15)$$

Таким образом, получен закон схождения детонационного фронта в таком виде, который задавался в § 2 и, кроме того, определена зависимость показателя автомодельности  $n$  от  $\gamma$  и  $\nu$ .

§ 5. Определив  $n(\gamma, \nu)$ , можно численно решить систему (2.6) с граничными условиями (2.7), однако предварительно необходимо исследовать характер точки  $\lambda = 1$ ,  $\omega = -1$ ,  $\pi = 1$ ,  $\delta = 1$ , которая будет особой. Это происходит от того, что граничные условия, являющиеся условиями на детонационной волне, заданы вдоль характеристики.



Фиг. 2



Фиг. 3

В качестве иллюстрации на фиг. 2 приведено одно из возможных решений, которое получено при условии

$$d\lambda / d\omega = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = 1 \quad (\xi = 1/\lambda) \quad (5.1)$$

Изменение условия (5.1) очень мало влияет на интегральные кривые, поэтому в работе не исследовался характер особой точки.

§ 6. Сравним полученный закон схождения детонационного фронта (для краткости он будет называться «решением с  $Q$ »), когда  $Q$  берется завышенным в процессе ускорения ( $\alpha = 1$ ) и закон схождения в решении Гудерля — Ландау — Станюковича, когда  $Q$  вообще не учитывается, т. е. решение строго справедливо только при  $Q = 0$  ( $\alpha = 2$ ). В действительности же величина  $\alpha$  изменяется в процессе схождения и  $1 \leq \alpha \leq 2$ . С этих же позиций можно сравнить результаты § 5 (распределения  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$  за фронтом) с решением Гудерля — Ландау — Станюковича.

Показатель автомодельности  $n$  для решения с  $Q$  и решения Гудерлея — Ландау — Станюковича в случае цилиндрической симметрии ( $\nu = 1$ ) при  $\gamma = 1.4$  равен 0.838, согласно (4.15) и 0.834, согласно [4], а при  $\gamma = 3$  равен соответственно 0.800 и 0.810. Аналогично в случае сферической симметрии ( $\nu = 2$ ) при  $\gamma = 1.4$   $n$  равно 0.720 и 0.717 и при  $\gamma = 3$  соответственно 0.667 и 0.638.

Из этих данных видно, что разница (вилка) между показателями автомодельности (законами схождения) решения Гудерлея—Ландау — Станюковича и полученного решения с  $Q$  (т. е. зона, в которой находится истинный средний закон схождения) достаточно мала (особенно для случая цилиндрической симметрии  $\nu = 1$ ). Таким образом, если выделяемая химическая энергия  $Q$  даже будет увеличиваться к центру по закону  $1/r_2^{2m}$ , это практически мало влияет на закон схождения. А наличие только постоянного  $Q$  на фронте тем более должно мало влиять на значение  $n$  в законе схождения  $r_2 = a_n (-t)^n$ .

На закон схождения детонационного фронта сильно влияет геометрия ( $\nu$ ), слабее среда  $\gamma$  и слабо влияет выделение химической энергии на фронте волны;  $Q$  определяет значение  $a_n$  и значение  $\nu$ ,  $p$ ,  $\rho$  на детонационном фронте (1.1) и (2.1).

Из всего сказанного представляется возможным следующий подход к уже не автомодельной задаче о схождении детонационного фронта, инициированного на каком-то начальном радиусе  $R$ , начавшего свое движение со скоростью Чепмена—Жуге

$$D^2_0 = 2(\gamma - 1)(\gamma + 1)Q_0 \quad (6.1)$$

Беря для соответствующего  $\gamma$  и  $\nu$  показатель  $n$  или  $m$  из (4.15) (в § 4 автомодельность не использовалась), имеем следующий закон движения фронта:

$$\frac{D}{D_0} = \left(\frac{R}{r_2}\right)^m, \quad m = \frac{\nu\gamma}{\gamma + 1} \quad (6.2)$$

Подставляя последнее выражение в (1.2) и используя (1.1), последовательно получим

$$\alpha = 1 + \left[1 - \left(\frac{r_2}{R}\right)^{2m-1/2}\right]^{1/2}$$

$$\frac{v_2}{v_{20}} = \alpha \left(\frac{R}{r_2}\right)^m, \quad \frac{p_2}{p_{20}} = \alpha \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2m}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_{20}} = \frac{\gamma}{\gamma - (\alpha - 1)} \quad (6.3)$$

Здесь  $v_{20}$ ,  $p_{20}$ ,  $\rho_{20}$  — значения соответствующих величин в режиме детонации Чепмена—Жуге для заданного  $Q_0$ . Результаты для  $\gamma = 3$ ,  $\nu = 1$  приведены на фиг. 3.

Автор благодарит Х. А. Рахматулина за руководство и ценные советы, а также К. И. Козорезова, Б. В. Куксенко, Н. А. Талицких, К. П. Станюковича и Я. М. Каждан за полезное обсуждение

Поступила 30 VII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Основы газовой динамики. Под ред. Г. Эммонса, Изд-во иностр. лит., 1963.
3. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. М., Наука, 1965.
4. С т а н ю к о в и ч К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.

## ПМТФ, № 1, 1970

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХФАЗНЫХ  
ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

Р. И. Нигматуллин

(Москва)

Рассматривается односкоростная и однотемпературная модель движения двухфазного твердого тела, в котором каждая фаза занимает некоторую часть объема. Исследование ведется в лагранжевых переменных, что представляет определенные преимущества при решении одномерных нестационарных задач. Тензор напряжения для смеси разлагается на две части — гидростатическое давление, общее для обеих фаз, связанное с трехчленным уравнением состояния, и дивiator, который изменяется упруго до определенного значения, после которого остается постоянным. Предложено некоторое соотношение для кинетики фазовых превращений, определяемое характерным временем реакции.

Далее решается задача о нестационарном одномерном движении металла (железо), возникающего в результате удара пластины о мишень. Фазовые превращения ( $\text{Fe}^\alpha \rightleftharpoons \text{Fe}^\beta$ ) за волной и их характерное время существенно влияют на затухание возмущения и на величину зоны, в которой эти переходы проходили полностью. Предложен метод определения коэффициента в соотношении для скорости фазового перехода по остаточному эффекту (упрочнение) после соударения.

1. Рассмотрим в лагранжевых координатах  $r^i$  движение двухфазной сплошной среды, в которой каждая фаза характеризуется своей истинной плотностью  $\rho_i^\circ$  и объемным содержанием  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ), причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (1.1)$$

Пусть скорости, а соответственно, и перемещения обеих фаз совпадают. Выделим материальный объем  $V$ , ограниченный материальной поверхностью  $\Sigma$ . Рассматривая его состояние в моменты  $\tau = 0$  и  $\tau = t$  при отсутствии внешних объемных сил, можно записать интегральные уравнения сохранения масс первой и второй фаз

$$\int_V \rho_{10}(r) dV = \int_V \left[ \rho_1(r, t) I(r, t) + \int_0^t J_{12}(r, \tau) I(r, \tau) d\tau \right] dV \quad (1.2)$$

$$\int_V \rho_{20}(r) dV = \int_V \left[ \rho_2(r, t) I(r, t) - \int_0^t J_{12}(r, \tau) I(r, \tau) d\tau \right] dV$$

Индекс 1 и 2 внизу относится соответственно к первой и второй фазам; индекс 0 внизу относится к начальному состоянию при  $\tau = 0$ ;  $J_{12}$  — скорость фазового перехода, равная массе, перешедшей из первой фазы во вторую (или наоборот с обратным знаком) в единице объема смеси за единицу времени;  $I(r, t)$  — степень расширения среды или якобиан преобразования от эйлеровых к лагранжевым координатам;  $\rho_i$  — средняя плотность  $i$ -й фазы

$$\rho_1 = \rho_1^\circ \alpha_1, \quad \rho_2 = \rho_2^\circ \alpha_2 \quad (1.3)$$

Складывая уравнения (1.2), имеем уравнение сохранения массы смеси

$$\int_V \rho_0(r) dV = \int_V \rho(r, t) I(r, t) dV \quad (\rho = \rho_1 + \rho_2) \quad (1.4)$$

( $\rho$  — плотность смеси)



В рамках односкоростной и однотемпературной модели достаточно рассмотреть только уравнения движения и энергии всей смеси

$$\int_V \rho_0(r) [\mathbf{v}(r, t) - \mathbf{v}_0(r)] dV = \int_0^t \int_{\Sigma} \sigma_n^\circ d \sum d\tau \quad (1.5)$$

$$\int_V \left[ (\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2) I - (\rho_{10} e_{10} + \rho_{20} e_{20}) + \rho_0 \frac{v^2 - v_0^2}{2} \right] dV = \int_0^t \int_{\Sigma} \sigma_n^\circ \mathbf{v} d \sum d\tau$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость среды,  $e_i$  — удельная внутренняя энергия  $i$ -й фазы,  $\sigma^\circ$  — тензор напряжения Лагранжа [1] в рассматриваемой среде. Используя теорему Гаусса — Остроградского, дифференцируя (1.2) и (1.5) по  $t$ , можно получить после некоторых преобразований следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\rho_0}{\rho} J_{12} = 0, \quad \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial I}{\partial t} - \frac{\rho_0}{\rho} J_{12} = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma^\circ, \quad \frac{\rho_0}{\rho} \left[ \rho_1 \frac{\partial e_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial e_2}{\partial t} + (e_2 - e_1) J_{12} \right] = (\sigma^\circ \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

2. Дальнейшее рассмотрение должно быть связано с термодинамическими и механическими свойствами исследуемой среды. Эйлеров тензор напряжений  $\sigma^{kl}$  можно представить в виде суммы изотропной и девиаторной частей

$$\sigma^{kl} = -p \delta^{kl} + \tau^{kl} \quad (2.1)$$

Значение  $p$  будем брать из уравнений состояния, полагая, что обе фазы имеют одинаковое давление

$$p = p_1(\rho_1^\circ, T) = p_2(\rho_2^\circ, T) \quad (2.2)$$

Девиатор напряжений для смеси примем равным

$$\tau^{kl} = \alpha_1 \tau_1^{kl} + \alpha_2 \tau_2^{kl} \quad (2.3)$$

Причем девиатор напряжений  $i$ -й фазы  $\tau_i^{kl}$  полагаем изменяющимся упруго до предела текучести  $\tau_i^*$ , после которого он должен сохранять постоянное значение. Тогда можно записать следующее уравнение для составляющих девиатора в главных осях

$$\frac{\partial \tau_i^{kl}}{\partial t} = 2\mu_i \left( \varepsilon_i^{kl} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \delta^{kl} \quad (\tau_i^{kl} \leq \tau_i^*) \quad (2.4)$$

где  $\varepsilon_i^{kl}$  — тензор скоростей деформаций. Отметим, что при ударном нагружении до давлений порядка сотен килобар девиатор, несмотря на его малость по сравнению с гидростатическим давлением, может оказать влияние на затухание возмущения.

Здесь не будут рассматриваться вопросы, связанные с использованием лагранжева тензора напряжений, так как полученные уравнения ниже будут применены для решения одномерных нестационарных задач, где указанные вопросы не представляют затруднений.

Удельную внутреннюю энергию и давление твердого или жидкого вещества обычно представляют в виде суммы трех составляющих [2-4], которые соответственно описывает упругие свойства холодного тела, гармонические колебания атомов в решетке и тепловое возбуждение электронов

вместе с ангармоническими эффектами колебаний атомов

$$e(\rho^\circ, T) = e_p + e_T + e_{ea}, \quad p(\rho^\circ, T) = p_p + p_T + p_{ea}$$

$$e_p = \int_{\rho_{00}^\circ}^{\rho^\circ} \frac{p_p(\rho^\circ)}{\rho^{\circ 2}} d\rho^\circ \quad \left( p_p(\rho^\circ) = \rho^{\circ 2} \frac{de_p}{d\rho^\circ} \right) \quad (2.5)$$

$$e_T = cT, \quad p_T = \gamma(\rho^\circ) \rho^\circ e_T, \quad e_{ea} = B(\rho^\circ) T^2, \quad p_{ea} = \Gamma(\rho^\circ) \rho^\circ e_{ea}$$

Здесь  $\gamma(\rho^\circ)$  — коэффициент Грюнайзена (для гармонических колебаний атомов),  $c = \text{const}$  — теплоемкость атомов,  $\Gamma(\rho^\circ)$  — аналог коэффициента Грюнайзена, связанный с ангармоническими эффектами и возбуждением электронов. Функция  $p_p(\rho^\circ)$ , от которой зависят  $B(\rho^\circ)$ ,  $\Gamma(\rho^\circ)$  и  $\gamma(\rho^\circ)$  определяется из эксперимента. В [4] для определения уравнения состояния металлов и ионных кристаллов используется и разрабатывается так называемый метод потенциалов, очень удобный для применений. Потенциальные составляющие для внутренней энергии и давления имеют вид

$$e_p(\rho^\circ) = 3Ab^{-1} \exp b(1 - x^{1/3}) - 3Kx^{-1/3} \quad (x = \rho_0^\circ / \rho^\circ)$$

$$p_p(\rho^\circ) = Ax^{-2/3} \exp b(1 - x^{1/3}) - Kx^{-4/3} \quad (2.6)$$

Здесь  $A, K, b, \rho_0^\circ$  — фиксированные для каждого металла или каждой его фазы величины. Для коэффициента Грюнайзена можно принять линейную аппроксимацию

$$\gamma(\rho^\circ) = \alpha - \beta \rho^\circ / \rho_0^\circ \quad (2.7)$$

справедливую для многих металлов и их фаз в довольно широком диапазоне плотностей.

Приближение постоянной теплоемкости для  $e_T$  существенно уменьшает объем вычислений и в то же время имеет достаточную точность при  $T > \theta$ , где  $\theta$  — дебаевская температура вещества, и для задач, связанных с ударным нагружением, вполне оправдано.

Та часть внутренней энергии, которая связана с квадратом температуры, становится существенной, когда давление в ударной волне превышает 1 мбар ( $T > 10000^\circ \text{K}$ ). Имеются различные точки зрения [2-4] на вычисление  $e_{ea}$  и  $p_{ea}$ .

Возможность фазовых переходов приводит к необходимости согласования уравнений состояния фаз для внутренних энергий, чтобы правильно учесть энергетические переходы. Введем оператор

$$E_i(\rho_i^\circ, T) = e_{pi}(\rho_i^\circ) + c_i T + B_i(\rho_i^\circ) T^2 \quad (2.8)$$

Тогда нормированные уравнения для внутренних энергий фаз можно записать в виде

$$e_1(\rho_1^\circ, T) = E_1(\rho_1^\circ, T) + e_{01}, \quad e_2(\rho_2^\circ, T) = E_2(\rho_2^\circ, T) + e_{02} \quad (2.9)$$

( $e_{01} = \text{const}$ ,  $e_{02} = E_1(\rho_{1s0}^\circ, T_0) + l_e(T_0) - E_2(\rho_{2s0}^\circ, T_0) + e_{01} = \text{const}$ )

причем плотности фаз на линии насыщения  $\rho_{1s}^\circ$  и  $\rho_{2s}^\circ$  определяются из уравнений

$$p_1(\rho_{1s0}^\circ, T_0) = p_s(T_0), \quad p_2(\rho_{2s0}^\circ, T_0) = p_s(T_0) \quad (2.10)$$

где  $p_s(T)$  — давление фазового перехода или линия равновесия двух фаз, а  $p_i$  имеют вид

$$p_i(\rho_i, T) = p_{pi}(\rho_i^\circ) + \gamma_i(\rho_i^\circ) \rho_i^\circ c_i T + B_i(\rho_i^\circ) \Gamma(\rho_i^\circ) \rho_i^\circ T^2 \quad (2.11)$$

При известных уравнениях состояния фаз (2.11) и линии насыщения  $p_s(T)$ , исходя из уравнения Клапейрона — Клаузиуса, можно определить

$$l_e(T) = \left( \frac{1}{\rho_2^s} - \frac{1}{\rho_1^s} \right) \left( T \frac{dp_s}{dT} - p_s \right) \quad (2.12)$$

Вообще говоря, функция  $p_s(T)$  и уравнения состояния фаз (2.9) и (2.11) не являются независимыми и они должны быть согласованы, чтобы на всей кривой насыщения выполнялось соотношение Клапейрона — Клаузиуса.

Кинетика фазовых переходов в твердых телах при высоких давлениях исследована не достаточно подробно с количественной точки зрения. Поэтому целесообразно в качестве первого приближения исходить из общего положения термодинамики необратимых процессов. Предварительно разобьем  $J_{12}$  на два слагаемых

$$J_{12} = j_{12} - j_{21} \quad (2.13)$$

каждое из которых может быть только неотрицательным ( $j_{12} \geq 0, j_{21} \geq 0$ ), причем одно из них в каждой точке обязательно равно 0. Если фазовых переходов нет, то  $j_{12} = j_{21} = 0$ . Далее  $j_{12}$  будет давать скорость перехода из первой фазы во вторую, а  $j_{21}$  — из второй фазы в первую. Будем считать, что фазовый переход (например  $1 \rightarrow 2$ , если  $\rho_1 > 0$ ) идет тем быстрее, чем больше термодинамический потенциал вещества в первой фазе превышает термодинамический потенциал вещества во второй фазе при тех же давлении и температуре (аналогично и для перехода  $2 \rightarrow 1$ , если  $\rho_2 > 0$ ), т. е.

$$j_{12} = F_{12} [\varphi_1(p, T) - \varphi_2(p, T)] \quad (\rho_1 > 0, \varphi_1 > \varphi_2), \\ j_{12} = 0 \quad (\rho_1 = 0 \text{ или } \varphi_1 \leq \varphi_2) \quad (2.14)$$

$$j_{21} = F_{21} [\varphi_2(p, T) - \varphi_1(p, T)] \quad (\rho_2 > 0, \varphi_2 > \varphi_1), \\ j_{21} = 0 \quad (\rho_2 = 0 \text{ или } \varphi_2 \leq \varphi_1)$$

Заметим, что

$$\varphi_1(p_s(T), T) = \varphi_2(p_s(T), T) \quad (2.15)$$

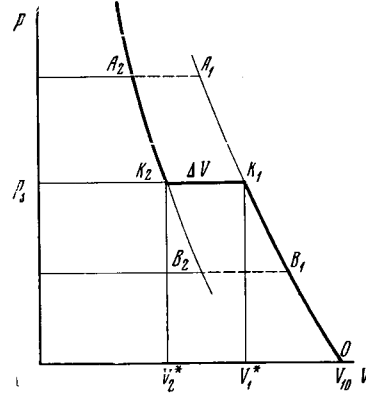
Рассмотрим  $pV$ -диаграмму (фиг. 1), где нанесены изотермы, соответствующие первой фазе  $OK_1A_1$  и второй фазе  $B_2K_2A_2$ , относящиеся к одной температуре.

Вдоль изотермы имеем  $d\varphi = Vdp$  ( $\varphi = e + pV - Ts$ , где  $s$  — энтропия,  $V$  — удельный объем). Отсюда видно, что разность термодинамических потенциалов в точках  $A_1$  и  $A_2$ , а также  $B_1$  и  $B_2$  равна соответственно площади  $K_1K_2A_2A_1$  и  $K_1K_2B_2B_1$  или

$$\varphi(A_1) - \varphi(A_2) \approx (p - p_s)\Delta V, \quad \varphi(B_2) - \varphi(B_1) \approx (p_s - p)\Delta V$$

Тогда соотношения (2.13) примут вид

$$j_{12} = F_{12}\Delta V (p - p_s) \quad (\rho_1 > 0, p > p_s) \\ j_{12} = 0 \quad (\rho_1 = 0 \text{ или } p \leq p_s) \quad (2.16) \\ j_{21} = F_{21}\Delta V (p_s - p) \quad (\rho_2 > 0, p_s > p) \\ j_{21} = 0 \quad (\rho_2 = 0 \text{ или } p_s \leq p)$$



Фиг. 1

Исходя из характерного времени перехода, можно оценить величины коэффициентов  $F_{12}$  и  $F_{21}$ . Отметим, что аналогичное рассмотрение для кинетики фазовых переходов применительно к парожидкостным смесям проведено в работе [5].

3. Запишем систему дифференциальных уравнений (1.6) для одномерного плоского движения ( $v_1 = v(r)$ ,  $v_2 = v_3 = 0$ ), переходя к переменным  $\rho_1^\circ, \rho_2^\circ, \alpha, v, T, p, \tau^{11}, r$ , где  $r$  — лагранжева координата в направлении движения. При этом учтем, что

$$\partial I / \partial t = \partial v / \partial r \quad (3.1)$$

а составляющие лагранжева  $\sigma^\circ$  и эйлерова  $\sigma$  тензоров напряжений связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sigma^{\circ 11} = \sigma^{11}, \quad \rho \sigma^{\circ 22} = \rho \sigma^{\circ 33} = \rho_0 \sigma^{22} = \rho_0 \sigma^{33} \quad (3.2)$$

Тогда система (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial \rho_1^\circ}{\partial t} + \frac{\rho_1^\circ}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= b_1 = -\frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{J_{12}}{\rho} \\ \frac{1-\alpha}{\rho} \frac{\partial \rho_2^\circ}{\partial t} - \frac{\rho_2^\circ}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= b_2 = -\frac{\rho_2}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{J_{12}}{\rho} \\ a_{31} \frac{\partial \rho_1^\circ}{\partial t} + a_{32} \frac{\partial \rho_2^\circ}{\partial t} + a_{33} \frac{\partial T}{\partial t} &= b_3 = \frac{\sigma^{11}}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial r} - (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{J_{12}}{\rho} \\ a_{41} \frac{\partial \rho_1^\circ}{\partial t} + a_{42} \frac{\partial \rho_2^\circ}{\partial t} + a_{43} \frac{\partial T}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{31}(\rho_1^\circ, \rho_2^\circ, \alpha, T) &= \frac{\rho_1}{\rho} \left( \frac{\partial E_1}{\partial \rho_1^\circ} \right)_T, & a_{32}(\rho_1^\circ, \rho_2^\circ, \alpha, T) &= \frac{\rho_2}{\rho} \left( \frac{\partial E_2}{\partial \rho_2^\circ} \right)_T \\ a_{33}(\rho_1^\circ, \rho_2^\circ, \alpha, T) &= \frac{\rho_1}{\rho} \left( \frac{\partial E_1}{\partial T} \right)_{\rho_1^\circ} + \frac{\rho_2}{\rho} \left( \frac{\partial E_2}{\partial T} \right)_{\rho_2^\circ}, & a_{41}(\rho_1^\circ, T) &= \left( \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1^\circ} \right)_T \\ a_{42}(\rho_2^\circ, T) &= - \left( \frac{\partial p_2}{\partial \rho_2^\circ} \right)_T, & a_{44}(\rho_1^\circ, \rho_2^\circ, T) &= \left( \frac{\partial p_1}{\partial T} \right)_{\rho_1^\circ} - \left( \frac{\partial p_2}{\partial T} \right)_{\rho_2^\circ} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Четвертое уравнение (3.3) получено после дифференцирования по  $t$  уравнения (2.2) (равенство давлений фаз). Складывая первые два уравнения (3.3), получаем уравнение неразрывности смеси

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.5)$$

Для рассматриваемого случая уравнение (2.4) относительно составляющей дивергенции  $\tau_i^{11}$  с учетом (3.5) имеет вид

$$\frac{\partial \tau_i^{11}}{\partial t} = \frac{4}{3} \mu \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial r} \quad (\tau_i^{11} \leq \tau_i^*) \quad (3.6)$$

Система (3.3) совместно с (3.4), (2.1), (3.6) при заданных уравнениях состояния фаз (2.9), (2.11), линии равновесия фаз  $p_s(T)$  и коэффициентов  $F_{12}$  и  $F_{21}$  в уравнениях кинетики фазовых переходов (2.16) является замкнутой в области непрерывного движения двухфазного сжимаемого твердого тела. Отметим, что в случае отсутствия одной из фаз ( $\alpha \equiv 0$  или  $\alpha \equiv 1$ ) система (3.3) автоматически переходит в систему уравнений движения соответствующей однофазной среды.

В рамках описанной модели рассмотрена задача о плоском ударе пластины толщиной  $l_1$  (ударник), имеющей бесконечные размеры в направлении, перпендикулярном к движению, о полупространство или слой толщины  $l - l_1$  (мишень, находящаяся справа). Пусть слева от точки  $r = 0$  и справа от точки  $r = l$  известны напряжения (граничные условия)

$$\sigma^{11}(0, t) = \sigma_0(t), \quad \sigma^{11}(l, t) = \sigma_l(t) \quad (3.7)$$

В простейшем случае  $\sigma_0(t) \equiv \sigma_l(t) \equiv 0$ . При  $t = 0$  известно невозмущенное состояние (начальные условия) системы

$$\rho_{10}^0, \rho_{20}^0, \quad \alpha_0 \equiv 1, \quad \bar{T}_0, \quad \tau_0^{11} \equiv 0$$

а также

$$v_0(r) \equiv v_0 \quad (0 \leq r \leq l_1), \quad v_0(r) \equiv 0 \quad (l_1 \leq r \leq l) \quad (3.8)$$

Для решения поставленной задачи использовался так называемый метод прямых или метод частиц с применением псевдовязкости.

Для расчета упруго-пластических течений в эйлеровых переменных этот метод с соответствующими ссылками рассмотрен в [6].

В системе координат  $(r, t)$  на оси  $r$  в области течения возьмем точки  $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, r_n$  ( $r_0 = -r_1, r_0 < 0; r_n = l + l - r_{n-1}, r_{n-1} < l$ ) и проведем прямые  $r = r_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ), что соответствует разбиению системы на  $n$  материальных частиц. Предполагая существование достаточно гладкого решения, будем определять значения искомых функций в точках  $r = r_j$ , а производные по  $r$  заменим разностными отношениями

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_j = \frac{v_{j+1}(t) - v_{j-1}(t)}{r_{j+1} - r_{j-1}}, \quad \left(\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial r}\right)_j = \frac{\sigma_{j+1}^{11}(t) - \sigma_{j-1}^{11}(t)}{r_{j+1} - r_{j-1}} \quad (3.9)$$

причем граничные условия (3.7) сносим соответственно на  $r = r_0$  и  $r = r_n$ . В результате система шести дифференциальных уравнений с частными производными (3.3) и (3.6) перейдет в систему  $6n$  обыкновенных дифференциальных уравнений по времени, которые совместно с начальными условиями при  $t = 0$  дают задачу Коши, решение которой на ЭВМ не представляет особых затруднений.

В тех случаях, когда в области течения имеются ударные волны, то решение задачи должно быть с разрывом, на котором должны выполняться условия Гюгонио. Чтобы использовать выписанный метод для таких задач, Рихтмайер и Нейман предложили вводить псевдовязкость, с учетом которой тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_j^{11} = -p_j + \tau_j^{11} - \varphi_j \quad (3.10)$$

$$\varphi_j = \rho_0 a_0^{2-n} C_n |v_{j+1} - v_j|^n \quad (v_{j+1} - v_j < 0), \quad \varphi_j = 0 \quad (v_{j+1} - v_j \geq 0)$$

и обычно используют линейную ( $n = 1, C_1 \approx 1$ ) и квадратичную ( $n = 2, C_2 \approx 2$ ) псевдовязкости.

Отметим, что напряжение в точке, разделяющей ударник и мишень не может быть растягивающим, поэтому, начиная с момента времени  $t_1$  (после прохождения ударной волны), когда

$$\sigma^{11}(l_1, t_1) = -p(l_1, t_1) + \tau^{11}(l_1, t_1) = 0$$

добавится еще одно граничное условие

$$\sigma^{11}(l_1, t) = 0 \quad (t \geq t_1) \quad (3.11)$$

что соответствует независимому движению мишени и ударника (отход или отскок ударника). Аналогичная ситуация может возникнуть после откола (нарушение сплошности внутри образца). Но вопрос о начале откола [7] является довольно сложным и в данной работе не затрагивается, хотя математически в данной схеме учет откольных явлений не представляет затруднений.

4. Рассмотренная выше модель и схема расчета использовались для исследования нестационарного движения, когда материалом ударника и мишени является железо, в котором за ударной волной достаточной интенсивности происходит превращение  $Fe^\alpha \rightarrow Fe^\epsilon$ , а в разгрузке  $Fe^\epsilon \rightarrow Fe^\alpha$ . В невозмущенном состоянии имеется только первая ( $Fe^\alpha$ ) фаза ( $\alpha_0 \equiv 1, \rho_0 = 7860 \text{ кг/м}^3$ ). Коэффициенты уравнений состояния (2.5) — (2.7) имеют следующие значения [4]:

для  $Fe^\alpha$

$$A = 9.9743 \cdot 10^5 \text{ бар}, \quad K = 10.1639 \cdot 10^5 \text{ бар}, \quad b = 7.0985$$

$$c = 4.45 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{сек}^2\text{град}, \quad \gamma_1 = 2.04 - 0.36 \rho_1^0 / \rho_0,$$

для  $Fe^\epsilon$

$$A = 9.4389 \cdot 10^5 \text{ бар}, \quad K = 10.740 \cdot 10^5 \text{ бар}, \quad b = 7.7845$$

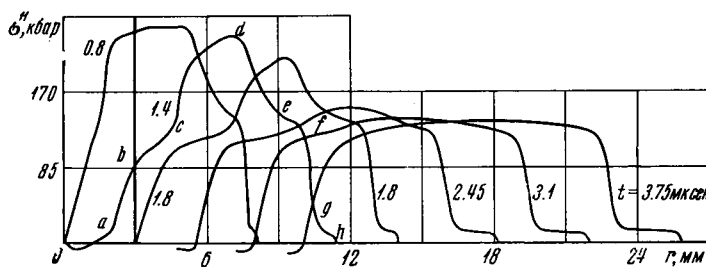
$$c = 4.45 \cdot 10^2 \text{ м}^2 / \text{сек}^2 \text{ град}, \quad \gamma_2 = 2.45 - 0.77 \rho_2^0 / \rho_0$$

Кривую фазового равновесия  $p_s(T)$  между  $Fe^\alpha$  и  $Fe^\epsilon$  можно представить в виде

$$p_s(T) = K_0 [0,0901 - 0,0152 (T / T_0) + 0,0021 (T / T_0)^2] \quad (4.1)$$

$(K_0 = 16.953 \cdot 10^5 \text{ бар}, T_0 = 300^\circ \text{ К})$

Эта зависимость соответствует кривой, которая получена Кауфманом [8] в результате обработки статических и динамических экспериментов различных авторов и на фазовой диаграмме железа, находящейся ниже по температуре так называемой тройной точки ( $p = 110 \text{ кбар}, T = 800^\circ \text{ К}$ ). Некоторые аспекты, связанные с рассматриваемым



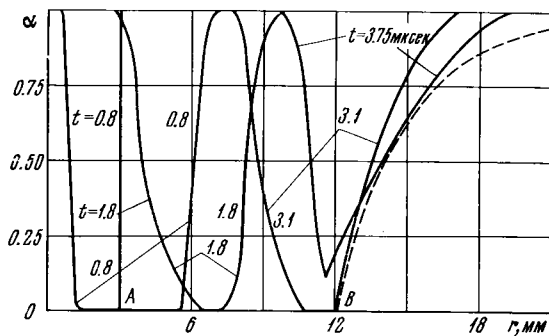
Фиг. 2

фазовым переходом в железе, рассмотрены в [2-4] со ссылками на работы С. А. Новикова, А. Г. Иванова и др., А. Болчаиа, Д. Эркмана и др., в которых в основном для стационарного случая рассмотрен ряд особенностей ударных волн в твердых телах, терпящих фазовые превращения, в частности образование многоволновой структуры и ударных волн разряжения.

Величины, характеризующие сопротивление среды динамическому сдвигу, принимались пока, за неимением других данных, одинаковыми для обеих фаз

$$\mu_1 = \mu_2 = 0,906 \cdot 10^6 \text{ бар}, \tau_1^* = \tau_2^* = 4,79 \cdot 10^3 \text{ бар}.$$

На фиг. 2 и 3 в качестве примера показаны соответственно эпюры напряжений  $\sigma^{11}$  и  $\alpha$  в различные моменты времени при ударе пластинкой ( $l_1 = 3 \text{ мм}$ ) мишени со скоростью  $v_0 = 1325 \text{ м/сек}$ . При этом для коэффициентов скоростей фазовых переходов



Фиг. 3

было принято  $F_{12} = F_{21} = 6.45 \text{ сек/м}^2$ . Кривая, соответствующая  $t = 1.4 \text{ мксек}$  (фиг. 2), номечена буквами, причем  $hg$  — упругий предвестник,  $gf$  — скачок, переводящий первую фазу в неравновесное состояние (имеет конечную толщину из-за псевдовязкости),  $ed$  — зона релаксации или волна фазового превращения, на которой происходит фазовый переход  $Fe^\alpha \rightarrow Fe^\epsilon$  (ее толщина определяется величиной  $F_{12}$ ),  $dcb$  — волна разряжения, переводящая вторую фазу в неравновесное состояние,  $ba$  — волна разряжения, на которой происходит переход  $Fe^\epsilon \rightarrow Fe^\alpha$  (если  $F_{21} \rightarrow \infty$ ,  $ba$  превращается в скачок разряжения);  $ao$  — последующая волна разряжения.

Наличие девиатора приводит к более раннему началу ослабления ударной волны, чем в чисто гидродинамической модели, так как упругая волна разгрузки имеет большую скорость, чем пластическая волна разгрузки. Конечное время, необходимое для фазового перехода и образующаяся многоволновая структура ударной волны также



приводят к тому, что волна, на которой заканчивается переход  $Fe^{\alpha} \rightarrow Fe^{\epsilon}$  начинает затухать существенно раньше, чем это следует из простейших соображений, связанных с ударной адиабатой. Кроме того, в момент соударения амплитуда скачка соответствует ударному сжатию первой фазы, на котором реализуется весь перепад массовой скорости (в данном случае  $v_0 / 2$ ). По мере удаления от места соударения амплитуда этого скачка стремится к своему стационарному значению, когда на нем реализуется лишь часть перепада, а остальная — на волне фазового превращения.

Заметим, что если скорость удара  $v_0$  пластиной из того же материала и достаточной толщины превышает 1625 м/сек, то структура всей ударной волны стремится к стационарной конфигурации до прихода волны разгрузки. Если  $650 < v_0 < 1625$  м/сек, то такой стационарной конфигурации не существует, так как скачок  $gf$  имеет большую скорость, чем волна  $ed$ , но каждая из этих волн стремится к своей стационарной амплитуде до прихода волны разгрузки.

5. Расчеты с различными значениями коэффициента  $F_{12}$  для скорости фазового перехода  $1 \rightarrow 2$  (см. (2.16)) показывают, что глубина  $\delta$  зоны, в которой фазовые переходы происходили полностью ( $AB$  на фиг. 3), при прочих равных условиях существенно зависит от принятого значения  $F_{12}$ , а кривая  $\alpha_{\min}(r)$  (пунктирная линия на фиг. 3) круто идет вверх из точки  $B$ . Это создает возможность определения  $F_{12}$  по остаточному эффекту, для чего нужно после соответствующего эксперимента определить действительную глубину этой зоны  $\delta$ .

В связи с этим отметим явление «упрочнения взрывом» железа и малоуглеродистой стали, когда после прохождения ударной волны достаточной интенсивности происходит существенное увеличение характеристик прочности (например, твердости) материала [9]. Анализ кривых твердости по глубине мишени показывает, что при достаточно больших скоростях удара имеется три зоны упрочнения: первая — зона существенного упрочнения, в которой твердость фактически постоянна по глубине; вторая — узкая зона умеренного упрочнения, в которой твердость резко падает по глубине, и третья — зона слабого упрочнения, в которой твердость постепенно понижается по глубине. Глубина первой зоны определяется скоростью удара.

Эти факты позволяют предположить, что упрочнение в первой и второй зонах связано с фазовым переходом  $Fe^{\alpha} \rightleftharpoons Fe^{\epsilon}$ , а в третьей зоне — с пластическими деформациями на ударной волне, давление которой уже меньше давления, соответствующего фазовому переходу. Причем в первой зоне фазовые переходы происходят полностью, а во второй — частично. В таком случае для определения глубины зоны  $AB$ , очевидно, достаточно каждый раз определять глубину  $\delta_e$  зоны, в которой твердость после упрочнения постоянна, в зависимости от скорости удара и при фиксированной толщине ударника. Если удастся подобрать такое значение  $F_{12}$ , что  $\delta(v_0) \equiv \delta_e(v_0)$ , то это подтвердит указанную природу упрочнения, предложенное соотношение для кинетики фазовых переходов (2.16), а также даст реальное значение  $F_{12}$ .

Поступила 25 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М., Изд-во иностр. лит. 1963.
2. Зельдович Я. В., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
3. Альтшуллер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений. Усп. физ. н., 1965, т. 85, вып. 2.
4. Жарков В. Н., Калинин В. А. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах. М., «Наука», 1968.
5. Нигматулин Р. И. Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде с фазовыми переходами. Изв. АН СССР, МЖТ, 1967, № 5.
6. Уилкинс М. Л. Расчет упруго-пластических течений. Сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М., «Мир», 1967.
7. Скандор И. Ударные волны в твердых телах. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1968, № 4.
8. Кауфман Л. Фазовые равновесия и превращения в металлах под давлением. Сб. «Твердые тела под высоким давлением», М., «Мир», 1966.
9. Козорезов К. И., Скугорова Н. Ф. Упрочнение сталей ударными волнами. Физика и химия обработки материалов, 1969, № 2.

**МЕХАНИКА  
ТВЕРДОГО ТЕЛА  
№ 4 • 1974**

УДК 539.374

**К МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ  
С ДИСЛОКАЦИОННОЙ КИНЕТИКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

Р. И. НИГМАТУЛИН, Н. Н. ХОЛИН

(Москва)

Исследуется неупругое поведение железа и малоуглеродистых сталей в широком диапазоне изменения скоростей деформаций. Обсуждается возможность описания статических и динамических экспериментов на основе некоторого механизма движения и образования дислокаций. На основе развиваемой в работе модели ставится и численно решается задача о квазистатическом сжатии коротких стержневых образцов. Сравнение численного решения задачи и результатов соответствующих экспериментов позволило получить значения кинетических параметров, входящих в определяющие соотношения. Далее ставится и численно решается задача о плоском соударении пластин и предлагается теория распространения фронта Людерса.

Одним из подходов к проблеме построения модели упругопластического тела с учетом временных эффектов является подход, основанный на изучении внутренних микроскопических процессов, происходящих в металлах при их деформировании и ответственных за их неупругое поведение.

В определенных пределах изменения параметров состояния таких материалов как металлы и кристаллы элементарными носителями пластичности являются дислокации — линейные дефекты структуры кристаллических решеток. Дислокации как индивидуальные объекты достаточно хорошо изучены, и имеется много экспериментальных данных по определению скоростей движения дислокаций, геометрии скольжения, разработаны методы определения плотности дислокаций и т. д. (см., например, [1-3]). Однако при построении феноменологических моделей пластического течения на основе дислокационных представлений возникают большие трудности, связанные с нахождением зависимости макроскопических параметров, характеризующих поведение среды в целом, от некоторых усредненных параметров, характеризующих поведение дислокаций на микроскопическом уровне.

В работах Тейлора [4] и Гилмана [5] разрабатывается модель упругопластической среды, в которой пластическое деформирование рассматривается как результат движения и размножения дислокаций, а упрочнение — как результат их частичного загибания вследствие увеличившейся их плотности. На основе этой модели в [4, 5] исследуется поведение упругого предвестника при соударении пластин, результаты расчетов сравниваются с результатами экспериментов [6]. Кроме [6], можно указать еще аналогичную экспериментальную работу [7]. Данная работа является развитием [4, 5] для описания не только динамических процессов при соударении пластин, но и для описания квазистатических экспериментов по растяжению и сжатию коротких и длинных стержней, в частности с образованием фронтов Людерса.

Другую точку зрения на процесс текучести малоуглеродистой стали и других металлов представляет концепция Коттрелла о загибании дислокаций примесными атомами, определяющая некоторое время запаздывания текучести как время, необходимое для «вырывания» дислокаций из примесного облака. На основе этих представлений Ю. Н. Работновым предложена модель упругопластической среды с запаздыванием текучести [8], в которой, однако, не рассматривается кинетика взаимодействия дислокации с облаком, а момент начала релаксации определяется из условия выполнения некоторого интегрального равенства, учитывающего историю процесса. Эта модель описывает только переход из упругого в упругопластическое состояние. Для описания дальнейшего поведения среды необходимо привлечение дополнительных соображений. В [9] предлагается использовать функционал, учитывающий историю нагружения. Модель [9] не дает стационарного распространения воли Людерса при квазистатическом растяжении длинных стержней и релаксационного затухания упругого предвестника в динамических экспериментах (см. п. 5, 6).

**1. Соотношения, определяющие упругопластическое деформирование среды.** Ниже будут рассматриваться только такие случаи изотропной среды, когда имеется симметрия вращения относительно оси нагружения об-

разца. Обозначим эту ось  $I$ , а перпендикулярные к ней —  $2$  и  $3$ . Оси  $1-3$  — главные оси тензоров напряжения и деформации, причем

$$(1.1) \quad \sigma_2 = \sigma_3, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3$$

Тензор общей деформации определим как сумму тензора упругих  $\varepsilon^e$  и пластических  $\varepsilon^p$  деформаций

$$(1.2) \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p \quad (i=1, 2, 3)$$

что можно делать в случае малых деформаций. Пластическая часть тензора деформации есть результат движения дислокаций, а упругая — результат упругого деформирования атомных решеток, т. е. в основе упругого и пластического деформирования твердых тел, имеющих кристаллическую структуру, лежат различные физические процессы. Поэтому естественно записывать два различных определяющих соотношения, связывающих тензоры упругих и пластических деформаций с тензором напряжения. В дальнейшем, следуя [4, 5], примем, что упругое деформирование подчиняется закону Гука

$$(1.3) \quad \sigma_1 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_1^e + 2\lambda\varepsilon_2^e, \quad \sigma_2 = \lambda\varepsilon_1^e + 2(\lambda + \mu)\varepsilon_2^e$$

Относительно пластического деформирования примем аналогично [4, 5] постулат о пластической несжимаемости

$$(1.4) \quad \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = \varepsilon_1^p + 2\varepsilon_2^p = 0$$

Второе соотношение, определяющее пластическое деформирование, будет задаваться, исходя из дислокационных представлений (см. п. 2). В дальнейшем удобнее пользоваться главными значениями тензора сдвиговых напряжений  $\tau$  и тензора пластической деформации  $\varepsilon^p$

$$(1.5) \quad \tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2, \quad \varepsilon^p = (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)/2 = 3\varepsilon_1^p/4 = -3\varepsilon_2^p/2$$

В результате из (1.3) с учетом (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) для одноосного напряженного состояния (стержень) получим

$$(1.6) \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_1 = E(\varepsilon_1 - 4\varepsilon^p/3), \quad \tau = \sigma_1/2, \quad (E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu))$$

Аналогично для одноосного деформированного состояния ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ )

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_1 - 8\mu\varepsilon^p/3, \quad \sigma_2^* = \lambda\varepsilon_1 - 4\mu\varepsilon^p/3 \\ \tau &= \mu(\varepsilon_1 - 2\varepsilon^p), \quad p = -(\sigma_1 + 2\sigma_2)/3 = -K\varepsilon_1 \quad K = (3\lambda + 2\mu)/3 \end{aligned}$$

Уравнения (1.6) и (1.7) имеют ясный физический смысл, заключающийся в том, что напряжения растут за счет роста общей деформации и релаксируют за счет пластической. Эти уравнения дают феноменологическое объяснение релаксации напряжений практически для любых сред. Свойства конкретного материала должны учитываться при выборе физической модели для задания  $\varepsilon^p$ .

**2. Основные соотношения теории дислокаций.** Хотя в монокристаллах и существуют определенные плоскости и направления скольжения (системы скольжения), в которых происходит движение дислокаций, то для поликристаллических материалов системы скольжения в различных зернах ориентированы по-разному и поэтому в случае сложного нагружения нет выделенных систем скольжения. Поэтому, следуя [4, 5], будем предполагать, что плоскость скольжения совпадает с плоскостью действия максимального сдвигового напряжения, которая в рассматриваемых здесь случаях совпадает с плоскостью максимальных пластических деформаций. Скорость

роста максимальных пластических деформаций определяется соотношением Орована

$$(2.1) \quad d\varepsilon^p/dt = b n_m u$$

где  $b$  — вектор Бюргера (линейный параметр кристаллической решетки),  $n_m$  — плотность подвижных дислокаций,  $u$  — скорость их перемещения вдоль плоскости скольжения. Имеется в виду, что общая плотность дислокаций  $n_i$ , из которой  $n_m$  подвижны, а остальные  $n_i - n_m$  по разным причинам неподвижны.

В случае поликристаллических изотропных материалов плотность дислокаций можно характеризовать скалярным параметром  $n_i$ , понимая под этим число дислокационных линий, пересекающих единичную площадку или суммарную длину дислокационных линий в единице объема. Для отожженных малоуглеродистых сталей характерные значения  $n_i$  лежат в пределах  $10^8 - 10^9 \text{ см}^{-2}$ .

Связь между  $n_m$  и  $n_i$  следует выявлять из некоторых представлений теории дислокаций. В частности, Гилман [5] предложил следующую формулу:

$$(2.2) \quad n_m = n_i \exp(-n_i/n_*)$$

Зависимость (2.2) соответствует тому (см. фиг. 1), что доля подвижных дислокаций  $f = n_m/n_i$  является монотонно убывающей функцией общей плотности дислокаций; в области  $n_i < n_*$  с ростом  $n_i$  преобладает механизм размножения подвижных дислокаций, а в области  $n_i > n_*$  преобладает механизм зашпирации. Значение  $n_*$  для малоуглеродистой стали составляет  $10^9 - 10^{10} \text{ см}^{-2}$ . Формула (2.2) упрощает явление, так как она не учитывает влияние напряжений на долю подвижных дислокаций. Следует указать на большие трудности при экспериментальном определении  $n_*$ .

При пластической деформации металлов наряду с движением дислокаций происходит их размножение. Для большинства металлов и минералов справедлива зависимость вида [4, 5]

$$(2.3) \quad n_i = n_{i0} + m \varepsilon^p$$

где  $n_{i0}$  — начальная плотность дислокаций,  $m$  — постоянная (коэффициент размножения), которая для металлов по порядку равна  $10^{10} - 10^{12} \text{ см}^{-2}$ .

Экспериментальные данные по измерению скорости скольжения дислокаций  $u$  показывают, что она чрезвычайно чувствительна к сдвиговому напряжению  $\tau$ , действующему в плоскости скольжения, и может быть описана [1-5, 9] аппроксимацией (сплошная линия на фиг. 2)

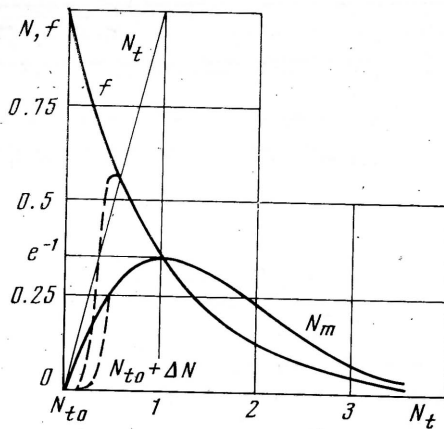
$$(2.4) \quad u = u_* \exp(-\tau_*/\tau)$$

где  $\tau_*$  — постоянная (коэффициент скольжения),  $u_*$  — сдвиговая скорость звука. Зависимость (2.4) соответствует тому, что максимальная скорость дислокаций равна сдвиговой скорости звука и при любом малом сдвиговом напряжении дислокации движутся. Последнее нуждается в уточнении, ибо экспериментальные и теоретические данные говорят о существовании некоторого порогового значения напряжения, ниже которого дислокации практически неподвижны. Это пороговое значение связано с силами Пайерлса — Набарро и определяет статический предел текучести  $\tau_e = 1/2 \sigma_e$ . Поэтому при напряжениях в области статического предела текучести зависимость (2.4) следует подкорректировать (пунктирная линия на фиг. 2) с помощью поправочного коэффициента  $\eta$ , не меняющего  $u$  при  $\tau > \tau_e$  и уменьшающего  $u$  при  $\tau \sim \tau_e$ .

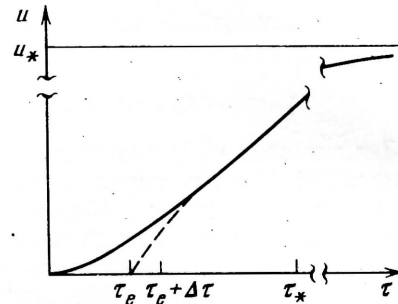
$$(2.5) \quad u = \eta u_* \exp(-\tau_*/\tau) \\ \eta = 1 - \exp(\tau_e - \tau) / \Delta \tau \quad \tau > \tau_e, \quad \eta = 0 \quad \tau \leq \tau_e$$

Зернистость, наличие примесей, термообработка — все это, не влияя на упругие свойства металла и параметры  $E$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $u_*$ ,  $b$ , существенно влияет на кинетические параметры поведения дислокаций  $n_{t0}$ ,  $n_*$ ,  $m$ ,  $\tau_*$  и через них на пластические свойства и, в частности, на статический предел текучести  $\sigma_e$  на диаграмме  $\sigma(\epsilon, \epsilon^p)$ .

**3. Квазистатическое одноосное нагружение короткого однородного стержня.** Рассмотрим случай, когда скорости деформирования не очень



Фиг. 1



Фиг. 2

велики, так что выполняется условие однородности напряжений вдоль стержня (квазистатичность). Примем и условие однородности деформаций вдоль стержня, что оправдано только для достаточно коротких стержней ( $l \sim d$ ).

Зададим закон деформирования в виде постоянной скорости деформации  $\dot{\epsilon} = \text{const}$ . Исходя из (1.6), (2.1)–(2.4), запишем замкнутую систему уравнений, определяющую состояние образца во времени

$$(3.1) \quad d\epsilon/dt = \text{const}, \quad d\epsilon^p/dt = b n_m u, \quad \sigma = E(\epsilon - 4/3 \epsilon^p), \quad \tau = \sigma/2 \\ n_m = n_t \exp(-n_t/n_*), \quad n_t = n_{t0} + m \epsilon^p, \quad u = u_* \exp(-\tau_*/\tau)$$

Здесь и далее везде индекс единица внизу при  $\sigma$  и  $\epsilon$  опущен. Начальные условия имеют вид

$$(3.2) \quad t=0, \quad \sigma=0, \quad \epsilon = \epsilon^p = 0$$

Решения (3.1), (3.2) сравнивались с соответствующими данными работы Марша и Кэмпбелла [10], где представлены результаты экспериментов по квазистатическому одноосному сжатию коротких цилиндрических образцов с диаметром 9.5 мм и длиной 12.7 мм. Материал образцов — малоуглеродистая сталь (английская марка En2A) следующего состава C — 0.085%, Mn — 0.45%, Si — 0.05%, S — 0.03%, P — 0.013%. Из за вариаций различных видов термообработки испытаниям подвергались образцы с разными плотностями зернистости ( $z=346, 495, 773, 2033 \text{ мм}^{-2}$ ; зернистость  $z=2033 \text{ мм}^{-2}$  соответствует среднему размеру зерна 0.025 мм).

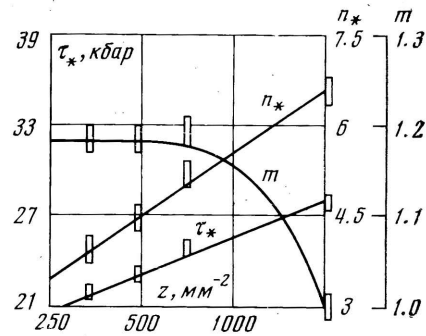
Для малоуглеродистых сталей и железа

$$(3.3) \quad E=2.1 \cdot 10^6 \text{ бар}, \quad \lambda=1.096 \cdot 10^6 \text{ бар}, \quad \mu=0.906 \cdot 10^6 \text{ бар}$$

$$u_*=3.2 \cdot 10^3 \text{ м/сек}, \quad b=2.5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

Система (3.1), (3.2) помимо этих параметров содержит четыре кинетических параметра  $n_{i0}, n_*, m, \tau_*$ .

Из указанных четырех параметров три ( $n_{i0}, m, \tau_*$ ) определяются непосредственно из прямых экспериментов по исследованию поведения дислокаций. Однако ввиду отсутствия экспериментальных данных для большинства конструкционных и, в частности, исследуемых в данной работе материалов (армко — железо, малоуглеродистая сталь) все четыре кинетических параметра полагались заранее неизвестными. Методика их нахождения, сводящаяся к решению обратной задачи, разработана и описана в п. 4. Здесь отметим лишь, что их нахождение осуществлялось, исходя из условия прохождения одной теоретической диаграммы  $\sigma(\epsilon)$  при некоторой скорости деформирования через четыре, характерные для экспериментальных данных точки. Полученные в



Фиг. 3

результате такой обработки экспериментальных данных значения  $n_*, m, \tau_*$  для малоуглеродистой стали Еп2А в зависимости от зернистости  $z$  представлены на рис. 3 (по оси ординат отложены  $n_* \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-2}$  и  $m \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-2}$ ). Увеличение  $\tau_*$  при увеличении  $z$  соответствует повышению прочностных свойств металла. То, что полученные значения кинетических констант ложатся на монотонные кривые, говорит в пользу принятой модели.

Значения начальной плотности дислокаций определялись весьма приблизительно ( $n_{i0}=10^5 \div 10^7 \text{ см}^{-2}$ ), что связано с разбросом данных по значениям верхнего предела текучести  $\sigma_{\text{max}}$  (см. п. 4). Отметим, что образование «зуба текучести» и, в частности,  $\sigma_{\text{max}}$  по существу связано с пластической неоднородностью и определяется рядом дополнительных процессов.

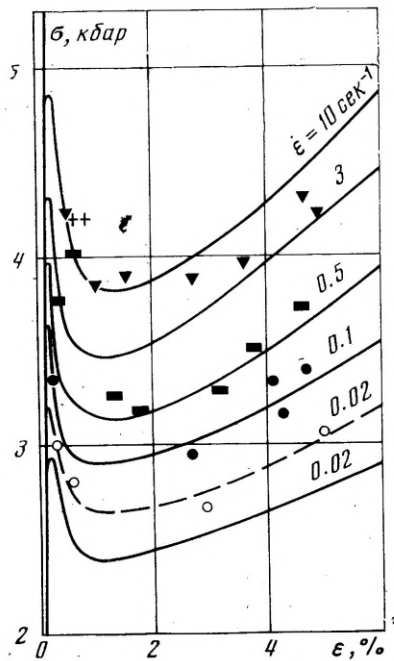
На фиг. 4 для зернистости  $z=2033 \text{ мм}^{-2}$  представлены теоретические диаграммы  $\sigma(\epsilon)$  при различных скоростях деформирования  $\dot{\epsilon}$  вместе с экспериментальными точками [14]. Для  $\dot{\epsilon} > 0.1 \text{ сек}^{-1}$  совпадение весьма удовлетворительное и отклонения теоретических кривых от опытных данных не превышают разброса экспериментальных точек. Расчетная кривая, соответствующая  $\dot{\epsilon} = 0.02 \text{ сек}^{-1}$ , занижена по сравнению с экспериментальными данными. Этот результат завышения скорости пластической деформации из-за использования аппроксимации (2.4), которая, как уже указывалось (см. п. 2 и фиг. 3), завышает  $u$  при  $\tau$ , близких к  $\tau_e$ . А именно, такие напряжения реализуются при малых скоростях деформаций  $\dot{\epsilon} \sim 10^{-2} - 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$ . На фиг. 4 для примера пунктиром проведена расчетная диаграмма  $\sigma(\epsilon)$  при  $\dot{\epsilon} = 0.02 \text{ сек}^{-1}$  с использованием уточненной зависимости  $u(\tau)$  в виде (2.5) при  $\Delta\tau = 0.5 \text{ кбар}$ . Заметим, что  $\eta$  не влияет на диаграмму  $\sigma(\epsilon)$  при  $\dot{\epsilon} > 0.1 \text{ сек}^{-1}$  (когда реализуются напряжения сдвига, заметно большие, чем  $\tau_e$ ).

На фиг. 5 представлены рассчитанные зависимости  $\sigma(\epsilon), \epsilon^{p^*}(\epsilon), n_i(\epsilon), n_m(\epsilon)$  при  $\dot{\epsilon} = 0.5 \text{ сек}^{-1}$  для стали Еп2А с  $z=2033 \text{ мм}^{-2}$ . Сплошные линии соответствуют  $n_{i0} = 10^7 \text{ см}^{-2}$ , а пунктирные —  $n_{i0} = 10^5 \text{ см}^{-2}$ . Видно, что  $n_{i0}$  влияет лишь на величину зуба текучести и не влияет на остальную часть

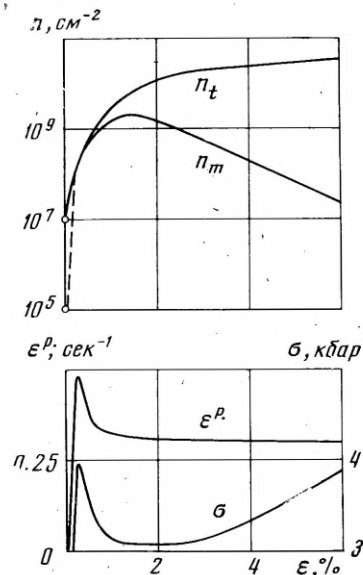


диаграммы процесса. Максимальное значение скорости роста пластической деформации  $\dot{\epsilon}^p$  принимает при достижении верхнего предела текучести. Запирание дислокаций (уменьшение  $n_m$  из-за  $n_i > n_*$  и упрочнение) начинается после прохождения нижнего предела текучести. Кривая  $n_i(\epsilon)$  характеризует уровень пластических деформаций, поскольку  $n_i$  связано с  $\epsilon^p$  линейной зависимостью.

4. Определение кинетических параметров из решения обратной задачи. Указанная процедура осуществлялась с помощью последовательных приближений. Для этого фиксировались четыре характерные точки (по числу отыскиваемых параметров) на экспериментальной диаграмме  $\sigma(\epsilon)$  исследуемого материала данной зернистости при



Фиг. 4



Фиг. 5

фиксированном значении скорости деформирования  $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}^0$ . Конкретно использовались эксперименты при  $\dot{\epsilon}^0 = 0.5 \text{ сек}^{-1}$  и фиксировались точки, соответствующие верхнему ( $\sigma_{\max}$  при  $\epsilon \approx 0.02$ ), нижнему ( $\sigma_{\min}$  при  $\epsilon \approx 0.01$ ) пределам текучести и двум значениям деформаций ( $\epsilon = 0.025$  и  $\epsilon = 0.045$ ) на участке непрерывного упрочнения. Соответствующие этим точкам напряжения обозначим  $\sigma_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), а их экспериментальные значения —  $\sigma_i^*$ .

Для некоторого набора (нулевое приближение) параметров  $Y^0 = (y_j)$  ( $j=1, 2, 3, 4$ , где  $y_1 = n_0$ ,  $y_2 = n_*$ ,  $y_3 = m$ ,  $y_4 = \tau_*$ ), приблизительно подобранных на основе уже имеющихся экспериментальных и теоретических данных, производился расчет прямой задачи. В результате этого расчета определялась зависимость  $\sigma(\epsilon)$  при  $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}^0$  и, в частности, значения  $\sigma_i^0 = \sigma_i(Y^0)$ . Эти значения не совпадают с экспериментальными  $\sigma_i^*$ . Далее каждому из параметров  $y_j$  задаются приращения  $\Delta y_j$  при неизменных значениях остальных и из решения прямой задачи определяются  $\sigma_i^j = \sigma_i(Y^j)$ , где

$$(4.1) \quad Y^1 = (y_1^0 + \Delta y_1, y_2^0, y_3^0, y_4^0), \quad Y^2 = (y_1^0, y_2^0 + \Delta y_2, y_3^0, y_4^0), \dots$$

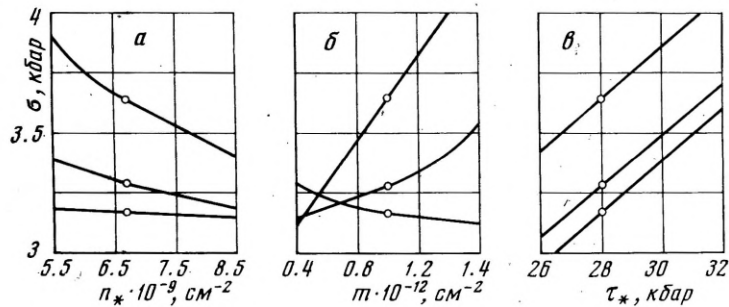
Для определения значений  $\sigma_i^0$  и  $\sigma_i^j$  ( $i, j=1, 2, 3, 4$ ) нужно рассчитать  $1+4=5$  вариантов прямой задачи при  $\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}^0$ . На фиг. 6 показано влияние кинетических параметров  $n_* = y_2$ ,  $m = y_3$ ,  $\tau_* = y_4$  на значения напряжений  $\sigma_2 = \sigma_{\min} = \sigma(0.01)$ ,  $\sigma_3 = \sigma(0.025)$ ,  $\sigma_4 = \sigma(0.045)$  при  $\dot{\epsilon}^0 = 0.5 \text{ сек}^{-1}$ . На фиг. 6, а принято  $m = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ ,  $\tau_* = 28 \text{ кбар}$ , на фиг. 6, б —  $n_* = 6.7 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ ,  $\tau_* = 28 \text{ кбар}$ , на фиг. 6, в принято  $n_* = 6.7 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ ,  $m = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ . Зависимости  $\sigma_i$  от  $m$  и  $n_*$  нелинейны, а от  $\tau_*$  линейны. Увеличение  $\tau_*$  и уменьшение  $n_*$  приводят к увеличению напряжений  $\sigma_i$ . Значение  $\sigma_2 = \sigma_{\min}$  умень-

шается, а  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  увеличиваются при увеличении  $m$ , что соответствует увеличению угла наклона на участке непрерывного упрочнения в координатах  $\sigma$ - $\varepsilon$ . Как показывают расчеты,  $n_{i0}$  не влияет на  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  и влияет лишь на  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$  - верхний предел текучести. Увеличение  $n_{i0}$  снижает  $\sigma_{\max}$ . Это связано с тем, что при  $n_{i0} < n_*$  с увеличением  $n_{i0}$  увеличивается и начальная плотность подвижных дислокаций (см. фиг. 2).

Зная  $\sigma_i^\circ$  и  $\sigma_i^j$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ), можно определить

$$(4.2) \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial y_j} \approx \frac{(\sigma_i(Y^j) - \sigma_i^\circ)}{\Delta y_j}$$

Уточненные значения параметров  $Y^* = (y_j^*) = (y_j^\circ + \Delta y_j^*)$ , которые должны реализовывать прохождение расчетной диаграммы  $\sigma(\varepsilon, \varepsilon^\circ)$  через четыре фиксированные



Фиг. 6

экспериментальные точки, нужно определять из системы уравнений

$$(4.3) \quad \sigma_i^* = \sigma_i(Y^*) = \sigma_i(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Если сохранять только линейные члены в тейлоровском разложении функций  $\sigma_i(Y)$  относительно точки  $Y^\circ$ , уравнения (4.3) сводятся к линейной системе алгебраических уравнений относительно  $\Delta y_j^*$

$$(4.4) \quad \sigma_i^* - \sigma_i^\circ = \sum_{j=1}^4 \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial y_j} \right) \Delta y_j^*, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

где значения коэффициентов известны из (4.2).

Как уже отмечалось,  $y_1 = n_{i0}$  влияет только на  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ , т. е.

$$(4.5) \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial y_1} = \frac{\partial \sigma_4}{\partial y_1} = 0$$

Поэтому из системы (4.4) выделяется независимая система трех уравнений

$$(4.6) \quad \sigma_i^* - \sigma_i^\circ = \sum_{j=2}^4 \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial y_j} \right) \Delta y_j, \quad i = 2, 3, 4$$

Решение системы (4.4) или (4.6) дает подправленные значения параметров  $y_j^* = y_j^\circ + \Delta y_j^*$ , с которыми можно произвести проверочный расчет и проверить условие (4.3). Если первое приближение оказывается недостаточно удовлетворительным, описанная процедура должна повториться (второе приближение), но уже в качестве исходных значений кинетических параметров нужно брать значения, полученные из предыдущего (первого) приближения. Обычно достаточно делать одно или два приближения. Результаты обсуждаются в п. 3.

То обстоятельство, что из системы (4.4) выделяется независимая подсистема (4.6) для определения  $y_2 = n_*$ ,  $y_3 = m$ ,  $y_4 = \tau_*$ , существенно. Дело в том, что, следуя п. 3, в экспериментах [10] верхний предел текучести  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$  замерялся с большим разбросом. Тем не менее из-за выделения подсистемы (4.6) это не сказывается на вычислении  $n_*$ ,  $m$ ,  $\tau_*$ . Разброс в значениях  $\sigma_{\max}$  сказывается лишь при вычислении параметра  $y_1 = n_{i0}$ , который определяется таким образом весьма неточно  $n_{i0} = 10^5 - 10^7 \text{ см}^{-2}$ . И обратно - разброс в вычисленных значениях  $n_{i0}$  сказывается (см. (4.5))

лишь на теоретическом значении  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$  и не влияет на остальную часть диаграмм  $\sigma(\varepsilon)$ .

Адекватность модели обеспечивает однозначный выбор кинетических параметров  $y_j^*$  из условия прохождения одной теоретической диаграммы  $\sigma(\varepsilon, \varepsilon^0)$  через выделенную систему экспериментальных точек; хорошее совпадение (при указанном наборе  $y_j^*$ ) всех теоретических диаграмм  $\sigma(\varepsilon, \varepsilon^0)$  во всем рассматриваемом диапазоне (не только в четырех точках) деформаций ( $0 < \varepsilon < 0.06$ ) и скоростей деформаций ( $10^{-2} < \dot{\varepsilon} < 10 \text{ сек}^{-1}$ ).

**5. Фронт Людерса (квазистатическая волна пластичности).** Сформулированные выше уравнения, описывающие поведение среды, относятся к малому элементарному объему, состояние которого можно считать однородным (локальные дифференциальные уравнения). Их можно непосредственно применять ко всему конечному образцу, если состояние этого образца однородно. При испытаниях длинных образцов из малоуглеродистой стали, например на растяжение [12, 13], их состояние нельзя считать однородным, о чем, в частности, свидетельствует появление фронтов Людерса.

Рассмотрим растяжение достаточно длинного образца из малоуглеродистой стали или какого-либо другого пластичного материала за счет движения его двух концов в противоположные стороны со скоростью  $w$ . Рассмотрим, как и в п. 3. квазистатический случай, когда  $w \ll a$  (где  $a$  — скорость звука в рассматриваемой среде), т. е. когда усилия ко всем элементам образца удовлетворяют условиям равновесия  $\sigma(x, t) = \sigma(t)$ .

Процесс растяжения образца во времени при  $w = \text{const}$  происходит следующим образом [12, 13]. Вначале деформация по всей длине происходит упруго и напряжение по линейному закону растет. В некоторый момент в зонах у концов образца  $x = \pm l$ , где имеются локальные избытки сдвиговых напряжений (из-за наличия в этих местах захватывающих устройств, дающих местные концентраторы), начинается скольжение и размножение дислокаций, приводящее к развитию пластических деформаций в этой зоне. Указанный этап аналогичен инициированию горения в трубе с горючей смесью запальным устройством. За счет развития пластических деформаций зона около  $x = \pm l$  дополнительно удлиняется, что дает некоторую разгрузку образца. Когда вся пластичность зоны в окрестности  $x = \pm l$  исчерпывается вследствие высокой плотности дислокаций ( $n_l \gg n_c$ ), вступает в игру дополнительный механизм (аналогичный механизму теплопроводности при распространении пламени) поперечного скольжения дислокаций (который в п. 2, 3 не рассматривался), приводящий к передвижению дислокаций из одной плоскости скольжения к другой [1-3] вдоль образца к середине, что вызывает перемещение фронта пластических деформаций (фронта Людерса). Если образец (его структура, зернистость, состав и т. д.) однороден по длине, то естественно, что при  $w = \text{const}$  устанавливается постоянная скорость  $v_0$  фронта Людерса и постоянное во времени напряжение  $\sigma$  до момента, когда оба фронта справа и слева придут в середину образца ( $x = 0$ ), подавляющая часть всех дислокаций в нем будет заперта и начнется деформация за счет упрочнения.

В квазистатических экспериментах с растяжением длинных стержней переход из упругого в пластическое состояние каждого элемента определяется приходом волны пластичности (причем скорости волн пластичности существенно меньше скорости звука и составляют  $\sim 10^{-1} \div 10 \text{ см/сек}$ ). Одинаковые по свойствам элементы стержня, но расположенные на разных расстояниях от захватов, «держат упруго» одно и то же напряжение (превышающее статический предел текучести) разное время. Это противоречит как модели [8], так и модели, использованной в предыдущих пунктах. Во то же время динамические эксперименты по плоскому удару (см. п. 6) свидетельствуют о мгновенном (после нагружения) начале релаксации напряжений. Такое различие связано с уровнем максимальных сдвиговых напряжений ( $\tau = 1-2 \text{ кбар}$ ) в квазистатических и ( $\tau = 5-8 \text{ кбар}$ ) в динамических экспериментах. А так как  $\tau$  определяет показатель степени в формуле для скорости дислокаций, то в динамических экспериментах реализуются на несколько порядков большие скорости дислокаций, а соответственно и скорости пластических деформаций. Но главное не в различиях скоростей дислокаций, так как и при напряжениях, свойственных

квазистатическим экспериментам, релаксация напряжений (пластическая деформация), согласно модели, использованной в предыдущих пунктах, должна начаться практически одновременно по всей длине стержня. Видимо в квазистатических экспериментах значительную роль играют примесные атомы, создающие активационные барьеры движению дислокаций. При достаточно больших напряжениях сдвига, свойственных динамическим экспериментам (см. п. 6), эти активационные барьеры преодолеваются, и процесс идет согласно модели п. 1, 2. А при напряжениях сдвига, свойственных квазистатическим экспериментам, практически все дислокации активационные барьеры преодолеть не могут. Исключение представляют зоны у захватов или концентраторов напряжений («слабые места»), где реализуются большие сдвиговые напряжения, и происходит пластическая деформация. Из этих зон образуется поток дислокаций вдоль стержня за счет механизма поперечного скольжения. Эти дислокации убирают или снижают активационные барьеры, т. е. действуют как катализаторы или активные центры, что приводит к вовлечению в движение почти всех имеющихся дислокаций и ускорению пластического деформирования согласно уже использованной модели.

Рассмотрим одну возможную постановку о растяжении или сжатии длинного стержня ( $w=w(t)$ ) с возникновением и распространением волны пластической деформации или фронта Людерса на основе модели п. 1, 2. В этом случае система дифференциальных уравнений с частными производными имеет вид

$$(5.1) \quad \begin{aligned} d\varepsilon/dt &= \partial v / \partial x, & dn_i/dt &= b m u n_m - \partial q / \partial x \\ \sigma &= E(\varepsilon - 4\varepsilon^p/3), & \varepsilon^p &= (n_i - n_{i0})/m \end{aligned}$$

Здесь в отличие от (3.4) во втором уравнении имеется поток дислокаций вдоль образца  $q$  из-за поперечного скольжения, для которого необходимо использовать дополнительный физический закон.

Роль  $q$  здесь аналогична теплопроводности вдоль пламени в теории горения. В связи с этим в качестве одного из возможных законов для  $q$  можно использовать закон поперечного скольжения дислокаций диффузионного типа

$$(5.2) \quad q = -\gamma(\sigma, n_i) \frac{\partial n_i}{\partial x}$$

где  $\gamma(\sigma, n_i)$ ,  $см^2/сек$  — коэффициент поперечного скольжения (диффузии) дислокаций. Можно показать, что именно такого вида закон для  $q$ , приводящий к дифференциальному уравнению для  $n_i$  с производной по  $x$  второго порядка, позволяет выявить единственное решение для структуры квазистатической волны пластичности и единственное значение скорости этой волны при фиксированном напряжении растяжения. В то же время определение потока дислокаций  $q$  в виде закона более низкого порядка типа  $q \sim n_i$  приводит к тому, что скорость волны пластичности может быть любым числом. Аналогичные соображения были использованы в [14] для описания поведения шейки в полимерных образцах.

Используем уже упоминавшиеся соотношения (2.2) и (2.4)

$$(5.3) \quad n_m = n_i \exp\left(-\frac{n_i}{n_*}\right), \quad u = u_* \exp\left(-\frac{\tau_*}{k\sigma}\right)$$

где  $k(x)$  — геометрический фактор, равный 0.5 (при одноосном напряженном состоянии стержня (см. (1.6)), почти по всей длине за исключением зон, длина которых порядка диаметра стержня (у захватов) или в местах концентрации напряжений, где  $k > 0.5$ ).

Система уравнений (5.1)–(5.3) вместе с граничными и начальными условиями

$$(5.4) \quad \begin{aligned} x=0, & \quad v=0; & x=l, & \quad v=w(t) \\ t=0, & \quad v=0, & n_i=n_{i0}, & \quad \varepsilon=\varepsilon^p=0 \end{aligned}$$

определяет нестационарную задачу об иницировании и распространении волны пластичности (волны Людерса).

В квазистатических экспериментах волна Людерса практически сразу выходит на стационарный режим. Поэтому рассмотрим постановку соответствующей стационарной задачи в системе координат, связанной с волной Людерса. Из (5.1) и (5.2) следует

$$(5.5) \quad \begin{aligned} v \frac{d\varepsilon}{dx} &= \frac{dv}{dx}, & v \frac{dn_i}{dx} &= b m n_m + \frac{d}{dx} \left( \gamma \frac{dn_i}{dx} \right) \\ \sigma &= \text{const}, & \varepsilon - \varepsilon_0 &= 4\varepsilon^p/3, & \varepsilon^p &= (n_i - n_{i0})/m \end{aligned}$$

Перед волной ( $x=-\infty$ ) среда находится в упругом состоянии, т.е. деформация ее равна  $\sigma/E$ , а за волной ( $x=+\infty$ ) деформация ее определяется статической кривой нагружения, т.е. предельной кривой  $\sigma_e(\varepsilon)$  или  $\varepsilon_e(\sigma)$  при бесконечно малой скорости деформирования ( $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ ). Таким образом, краевые условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.5) можно представить в виде

$$(5.6) \quad \begin{aligned} x=-\infty, & \quad \varepsilon=\varepsilon_0=\sigma/E, \quad \varepsilon^p=0, \quad v=v_0, \quad n_i=n_{i0} \\ x=+\infty, & \quad \varepsilon=\varepsilon_e(\sigma), \quad \varepsilon^p=3(\varepsilon_e-\varepsilon_0)/4, \quad v=v_e, \quad n_i=n_{ie} \end{aligned}$$

Скорость  $v_0$  определяет скорость фронта пластичности в лабораторной системе координат (относительно среды перед фронтом), а  $v_e - v_0 = w$  — скорость нагружения (скорость конца стержня).

Чтобы решение стационарной задачи (5.5), (5.6) было единственным, необходимо, чтобы начальное ( $O$ ) и конечное ( $e$ ) состояния могли существовать в стационарном состоянии. Краевые условия (5.6) при кинетических соотношениях в виде (5.3) не удовлетворяют этому требованию, так как в точках  $O$  и  $e$   $\varepsilon^p > 0$ . Аналогичная ситуация возникает в задаче о стационарном фронте пламени.

В теории горения для стационарности начального состояния несколько изменяется уравнение кинетики реакции, т.е. используется «усеченная» кинетика, когда считается, что имеется минимальная температура (немного превышающая начальную), ниже которой скорость реакции равна нулю. Аналогично следует подкорректировать («усечь») кинетическое соотношение (5.3) для обеспечения стационарности начального ( $O$ ) и конечного ( $e$ ) состояний, для чего в этих точках должно быть  $\varepsilon^p = 0$ . Например, следует полагать, что при  $n_i = n_{i0}$  и  $n_i = n_{ie}(\sigma)$  плотность подвижных дислокаций равна нулю. В дальнейшем это будет учитываться аналогично (2.5) с помощью корректирующей функции  $\psi(n_i)$  (см. пунктирные кривые на фиг. 1)

$$(5.7) \quad \begin{aligned} f(n_i) &= n_m/n_i = \psi(n_i) \exp(-n_i/n_*) \\ \psi(n_i) &= 1 - \exp\left(\frac{n_{i0} - n_i}{\Delta n}\right) \quad (n_i < n_{i0}), \quad \psi = 0 \quad (n_i \geq n_{ie}(\sigma)) \end{aligned}$$

Причем основную роль функция  $\psi(n_i)$  будет играть в области начального состояния ( $n_i \sim n_{i0}$ ), так как здесь  $\psi$  снижает долю подвижных дислокаций практически с единицы до нуля. В области же конечного состояния

( $n_t \sim n_{te} \gg n_*$ ) значение  $n_m$  по основной формуле (5.3) практически и без коррекции очень близко к нулю. Значение  $n_{te}$  определяется приложенным напряжением и статической кривой  $\varepsilon_e(\sigma)$

$$(5.8) \quad n_{te} = n_{t0} + m\varepsilon^p = n_{t0} + \frac{3m}{4}(\varepsilon_e - \varepsilon_0) = n_{t0} + \frac{3m}{4} \left[ \varepsilon_e(\sigma) - \frac{\sigma}{E} \right]$$

Система (5.5) имеет интеграл, следующий из первого уравнения

$$(5.9) \quad v = v_0 \exp(\varepsilon - \varepsilon_0) \approx v_0(1 + \varepsilon - \varepsilon_0) = v_0[1 + m^{-1}(n_t - n_{t0})]$$

откуда имеем выражение для  $v_e$  и для скорости конца стержня  $w$

$$(5.10) \quad v_e = v_0(1 + \varepsilon_e - \varepsilon_0), \quad w = v_e - v_0 = v_0(\varepsilon_e - \varepsilon_0)$$

Таким образом, при известных  $\sigma$  и  $v_0$  определяются все параметры за волной пластичности (в точке  $e$ ).

Краевая задача (5.5), (5.6) аналогично задаче о нормальном фронте пламени сводится к определению собственного значения задачи — скорости волны пластичности  $v_0$  при заданном значении  $\sigma$ . Значение  $v_0$  находится из условия прохождения интегральной кривой через две точки  $O$  и  $e$ , соответствующие состояниям перед и за волной.

Рассмотрим случай, когда коэффициент поперечного скольжения дислокаций зависит только от напряжения ( $\gamma = \gamma(\sigma)$ ), а деформации малы, т. е.  $\varepsilon \ll 1$  и  $v = v_0$ . Тогда из (5.5) и (5.9) следует

$$(5.11) \quad \gamma \frac{d^2 n_t}{dx^2} - v_0 \frac{dn_t}{dx} + b m u_n f(n_t) = 0$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$(5.12) \quad N = \frac{n_t}{n_*}, \quad y = \ln N, \quad X = x \left( \frac{\gamma}{b m u} \right)^{-1/2}, \quad U_0 = \frac{v_0}{(\gamma b m u)^{1/2}}$$

Тогда из (5.11), (5.6) следует

$$(5.13) \quad p \frac{dp}{dy} = -p^2 + U_0 p - f(y), \quad \frac{dy}{dX} = p$$

$$X = -\infty, \quad y = y_0 = \ln N_0 = \ln \frac{n_{t0}}{n_*}, \quad p = 0; \quad X = +\infty,$$

$$y = y_e = \ln N_e = \ln \frac{n_{te}}{n_*}, \quad p = 0$$

В окрестности  $n_t = n_{t0}$  или  $y = y_0$ , когда  $f(y) = 0$  (см. (5.5)), решение (5.13) имеет вид

$$(5.14) \quad p = U_0(1 - \exp(y_0 - y)) \approx U_0(y - y_0)$$

Уточним это решение. В области около начального состояния доля подвижных дислокаций (см. (5.7) с учетом (5.12) и (5.14)) приближенно описывается зависимостью

$$(5.15) \quad f(y) \approx \psi \approx \frac{N - N_0}{\Delta N} = \frac{N_0}{\Delta N} (\exp(y - y_0) - 1) \approx \frac{N_0(y - y_0)}{\Delta N} \approx \frac{N_0 p}{\Delta N U_0}$$

Тогда из (5.13) с учетом (5.15) следует приближенное решение, аналогичное (5.14), но учитывающее действие подвижных дислокаций

$$(5.16) \quad p = \left( U_0 - \frac{N_0}{\Delta N U_0} \right) (1 - \exp(y_0 - y))$$



Анализ (5.13) с учетом (5.16) и результатами численных расчетов показывает, что характер решения системы (5.13) соответствует зависимости

$$(5.17) \quad \frac{p}{U_0 - N_0/\Delta NU_0} = 1 - \exp(y_0 - y) - \left( \frac{y - y_0}{y_e - y_0} \right)^2$$

Действительно, при  $y - y_0 \ll y_e - y_0$  зависимость (5.17) переходит в (5.14), а при  $y = y_e$  она удовлетворяет (с точностью до  $N_0/N_e \ll 1$ ) граничному условию  $p=0$  в конечном состоянии  $e$ .

Если проинтегрировать от  $y_0$  до  $y_e$  первое уравнение (5.13), то получим биквадратное уравнение относительно  $U_0$

$$(5.18) \quad \left( U_0 - \frac{N_0}{\Delta NU_0} \right) U_0 S_1 - \left( U_0 - \frac{N_0}{\Delta NU_0} \right)^2 S = \Phi$$

$$S_1 = \int_{y_0}^{y_e} \varphi(y) dy, \quad S_2 = \int_{y_0}^{y_e} \varphi^2(y) dy, \quad \Phi = \int_{y_0}^{y_e} f(y) dy$$

С учетом (5.17), (5.12), (5.7) можно получить явные выражения для коэффициентов

$$(5.19) \quad S_1 = \frac{2}{3} (y_e - y_0) - 1 + O\left(\frac{N_0}{N_e}\right), \quad S_2 = \frac{8}{15} (y_e - y_0) - \frac{3}{2} + O\left(\frac{N_0}{N_e}\right)$$

$$\Phi = -\text{Ei}(-N_0) + \text{Ei}\left(-\frac{N_0}{\Delta N}\right) + O\left(\frac{N_0}{N_e}\right) \quad \left( \text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt, z < 0 \right)$$

где  $\text{Ei}(z)$  — интегральная показательная функция. При выводе (5.19) учитывалось, что  $N_0 \ll 1$ ,  $\Delta N \ll 1$ ,  $N_e \gg 1$ , что выполняется для пластичных металлов (малоуглеродистая сталь, армо-железо и др.), в которых наблюдается волна Людерса. Таким образом из (5.18), (5.19) можно определить  $U_0$ , а затем и скорость волны Людерса  $v_0$ .

$$(5.20) \quad v_0 = U_0 [b \mu u(\sigma) \gamma(\sigma)]^{1/2}, \quad U_0 = U_0(N_0, \Delta N, N_e)$$

Расчеты показали, что напряжение  $\sigma$ , определяющее  $N_e$  или  $y_e$ , почти не влияет на значение безразмерной скорости, т. е.  $\sigma$  влияет на  $v_0$  только через коэффициент поперечного скольжения  $\gamma(\sigma)$  и скорость скольжения дислокаций  $u(\sigma)$ . Для  $v_0(\sigma)$  имеется эмпирическая формула [12], аналогичная формуле (2.4) для  $u(\tau)$

$$(5.21) \quad v_0(\sigma) = v_* \exp(-\sigma_*/\sigma)$$

Из (5.20) и (5.21) следует, что аналогичный вид имеет и зависимость  $\gamma(\sigma)$ . Зная значение  $v_0$ , можно из (5.20) оценить значение  $\gamma$ . Для малоуглеродистой стали при  $\sigma = 2$  кбар  $\gamma \approx 10^{-1}$  см<sup>2</sup>/сек.

Следует подчеркнуть, что для развития более определенной теории этого явления необходимо проведение экспериментальных и теоретических исследований механизма поперечного скольжения, движения и размножения дислокаций особенно в области начального состояния материала, влияния на эти процессы примесных атомов.

В заключение опишем элементарную теорию квазистатического деформирования стержня, основанную на заданных зависимостях  $v_0(\sigma)$  скорости движения волны пластичности от напряжения и статической кривой  $\epsilon_e(\sigma)$ . Если задано напряжение  $\sigma$ , то из этих двух функций определится деформация  $\epsilon_e$  за волной пластичности и скорость волны пластичности  $v_0$ . Затем, используя (5.10), можно определить скорость конца стержня  $w$ , обеспечивающую данное напряжение.



Несколько сложнее обратная задача, когда задана скорость конца стержня  $w$  и требуется определить  $\sigma$ ,  $\epsilon_e$  и  $v_0$ . Задача сводится к решению уравнения, следующего из (5.10)

$$(5.22) \quad \epsilon_e(\sigma) = \frac{w}{v_0(\sigma)} + \frac{\sigma}{E}$$

Это уравнение можно решить графически. На фиг. 7 в координатах  $\sigma$ — $\epsilon$  нанесена статическая диаграмма  $\epsilon_e(\sigma)$  и кривые, соответствующие правой части уравнения (5.22) при различных значениях скорости конца стержня  $w$ . Точка пересечения двух кривых и определяет решение задачи (фиг. 7).

**6. Плоское соударение пластин (одноосное деформированное состояние).** Описанные выше кинетические процессы проявляются и при распространении ударных волн в металлах.

Известно, что плоские ударные волны в некоторых случаях распадаются на две волны. Это происходит в связи с переходом из режима упругого деформирования в пластический в точке Гюгонио  $H$ . Если напряжение за ударной волной больше, чем  $\sigma(H)$ , но меньше некоторого значения, то образуется двухволновая конфигурация — впереди идет первая ударная волна, соответствующая точке  $H$  (упругий предвестник), а за ней с меньшей скоростью — вторая ударная волна, переводящая среду из состояния  $H$  в конечное состояние.

Кинетические процессы, приводящие к мгновенному переходу в пластическое состояние, усложняют указанную выше схему. При этом напряжение за упругим предвестником может превышать  $\sigma(H)$  и изменяться во времени (затухать).

Запишем в лагранжевых переменных  $r$ ,  $t$  ( $r$  — продольная координата в начальном невозмущенном состоянии,  $t$  — время) систему уравнений одномерного плоского движения (когда все частицы испытывают одноосное деформирование) упругопластической среды с учетом определяющих соотношений (1.7), (2.1) — (2.4)

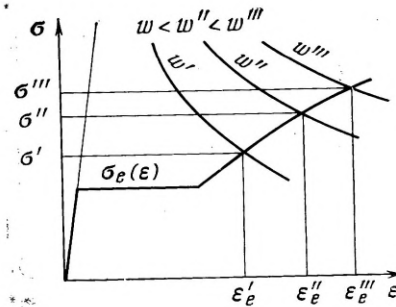
$$(6.1) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \frac{\partial \epsilon^p}{\partial t} = b n_m u$$

$$\sigma = -p + 4\tau/3, \quad p = -K\epsilon, \quad \tau = \mu(\epsilon - 2\epsilon^p)$$

$$n_m = n_i \exp\left(-\frac{n_i}{n_*}\right), \quad n_i = n_{i0} + m\epsilon^p, \quad u = u_* \exp\left(-\frac{\tau_*}{\tau}\right)$$

Здесь  $\rho_0$  и  $n_{i0}$  — соответственно начальная массовая плотность среды и начальная плотность дислокаций (далее везде индекс нуль внизу относится к начальному состоянию).

В рамках системы (6.1), описывающей поведение упругопластической среды, рассмотрим задачу о плоском ударе пластины толщины  $l$  (ударник,  $r < 0$ ) о полупространство или слой толщины  $L$  (мишень,  $r > 0$ ). Поперечные размеры (в направлении, перпендикулярном к движению) мишени и ударника полагаем достаточно большими, чтобы не рассматривать боковые волны разгрузки. Будем рассматривать времена, когда еще не появились



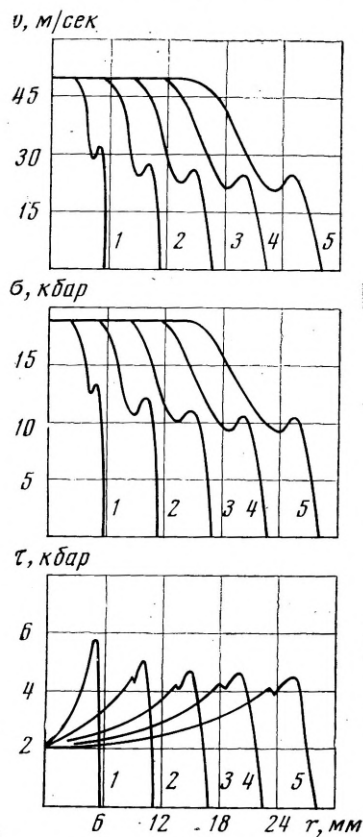
Фиг. 7

и продольные волны разгрузки из-за отражений от границ  $r=-l$  и  $r=L$ . Отметим, что  $r=0$  — плоскость соударения. При  $t=0$  известно невозмущенное состояние (начальные условия):  $\rho_0$ ,  $n_{i0}$ ,  $\sigma=\tau=0$ ,  $\varepsilon=\varepsilon^p=0$  и массовые скорости, причем

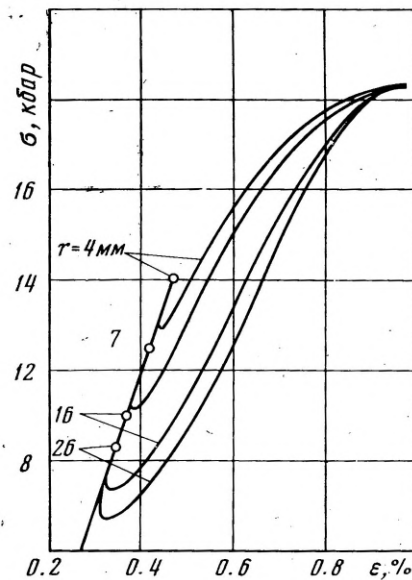
$$(6.2) \quad v(r, 0) = v_0 \quad (-l \leq r < 0), \quad v(r, 0) = 0 \quad (0 < r \leq L)$$

Система уравнений (6.1), (6.2) при заданных значениях  $K$ ,  $\mu$ ,  $b$ ,  $n_*$ ,  $m$ ,  $\tau_*$  замкнута. Для решения поставленной задачи использовался конечно-разностный метод прямых или частиц с использованием фиктивной вязкости [15, 16].

Расчеты производились, когда материал ударника и мишени — малоуглеродистая сталь En2A, которая использовалась в квазистатических экспериментах [10] и для которой из решения обратной квазистатической задачи (см. п. 4) определены значения



Фиг. 8



Фиг. 9

$n_*$ ,  $m$ ,  $\tau_*$  в зависимости от  $z$  (см. фиг. 3); значение начальной плотности дислокаций варьировалось:  $n_{i0} = 10^3 \div 10^8 \text{ см}^{-2}$  (значения  $b$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $u_*$  см. (3.3)). Кроме того, принималось  $\rho_0 = 7.84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

На фиг. 8 представлены полученные из расчета эпюры массовых скоростей  $v$ , напряжений  $\sigma$ , максимальных сдвиговых напряжений  $\tau$  в различные моменты времени  $t$ , мксек после соударения со скоростью  $v_0 = 100 \text{ м/сек}$  в случае зернистости  $z = 2033 \text{ мм}^{-2}$  и когда  $n_{i0} = 10^5 \text{ см}^{-2}$ . Сразу можно отметить, что по характеру расчетные кривые согласуются с экспериментальными [6, 7]. На фиг. 9 для этого же случая приведены получающиеся зависимости  $\sigma-\varepsilon$  для частиц среды, расположенных на разных глубинах  $r$  от плоскости удара. Следует отметить, что за упругим предвестником происходит почти упругая разгрузка, возникающая из-за начавшейся ранее релаксации напряжений в частицах среды, расположенных ближе к плоско-

сти удара ( $r=0$ ), т. е. уже охваченных возмущением. Таким образом расчеты реализуют «зуб текучести», падение напряжения и деформации за упругим предвестником и его затухание. Причем это затухание объясняется как релаксацией напряжений из-за пластических деформаций, так и упругой разгрузкой, вызванной этой релаксацией.

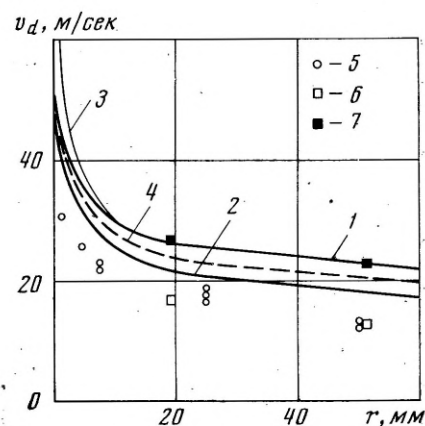
На фиг. 10 представлены рассчитанные кривые затухания массовой скорости  $v_d(r)$  за упругим предвестником при его распространении в малоуглеродистой стали En2A с зернистостью  $z=2033 \text{ мм}^{-2}$  (кривые 1, 3, 4),  $z=495 \text{ мм}^{-2}$  (кривая 2) и экспериментальные точки для армо-железа [6, 7] и малоуглеродистой стали SAE-1018 [7]. Хотя в [7] замерялась не скорость, а напряжение  $\sigma_d$  за упругим предвестником, но зная  $\sigma_d$  и упругие константы материала, легко вычислить из соотношений на скачке и значение массовой скорости  $v_d$ . Экспериментальные данные работ [6, 7] для армо-железа согласуются между собой (точки 5 и 6 при  $r=19.5 \text{ мм}$  и  $51 \text{ мм}$ ).

Скорость соударения  $v_0$  влияет на упругий предвестник лишь на расстояниях до 7–8 мм, а далее он ведет себя независимо от следующего за ним пластического ударного фронта (определяемого скоростью удара). Это видно из сравнения кривых 1 и 3, рассчитанных для  $z=2033 \text{ мм}^{-2}$  и  $n_{i0}=10^5 \text{ см}^{-2}$ , но кривая 1 при скорости удара  $v_0=100 \text{ м/сек}$  (при  $r=0$   $v_d=50 \text{ м/сек}$ ), а кривая 3 — при  $v_0=140 \text{ м/сек}$  (при  $r=0$   $v_d=70 \text{ м/сек}$ ). При  $r>8 \text{ мм}$  затухание упругого предвестника для этих двух скоростей удара описывается одной и той же кривой. Указанное качественное обстоятельство, полученное из расчетов, соответствует экспериментальным данным [6].

Из сравнения кривых 1 ( $n_{i0}=10^5 \text{ см}^{-2}$ ) и 4 ( $n_{i0}=10^8 \text{ см}^{-2}$ ) видно влияние параметра  $n_{i0}$ , увеличение которого делает материал более пластичным, в результате чего затухание упругого предвестника более быстрое. К аналогичному эффекту приводит и уменьшение зернистости  $z$  (ср. кривые 1 и 2).

Представленные на фиг. 10 расчетные кривые 1–4 релаксационного затухания упругого предвестника в малоуглеродистой стали En2A хорошо согласуются с экспериментальными данными [7] для малоуглеродистой стали SAE-1018 и лежат выше экспериментальных данных [6, 7] для армо-железа. Последнее объясняется различием пластических свойств малоуглеродистой стали и армо-железа (упругие константы этих материалов практически одинаковы), из которых армо-железо более пластичный материал и в нем затухание  $v_d(r)$  должно происходить интенсивнее. Это подтверждается экспериментальными данными (точки 6 и 7) работы [7].

Таким образом, имеется хорошее согласование между экспериментальными и теоретическими данными, что говорит о применимости рассмотренной модели для расчетов упругопластических процессов в широком диапазоне скоростей деформирования.



Фиг. 10

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фридель Ж. Дислокации, М., «Мир», 1967.
2. Халл Д. Введение в дислокации, М., «Атомиздат», 1968.
3. Миркин Л. И. Физические основы прочности и пластичности. Изд-во МГУ, 1968.
4. Taylor J. Dislocation dynamics and dynamics yielding. J. Appl. Phys., 1965, vol. 36, No. 10, p. 3146–3150. (Рус. перев. Тейлор Дж. Динамика дислокаций и динамическая текучесть. Механика. Сб. перев. 1966, № 4).
5. Gilman J. Dislocation dynamics and the response of materials. J. Appl. Mech. Rev., 1968, vol. 21, No. 8, p. 767–783. (Рус. перев. Гилман Дж. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии. Механика, Сб. перев., 1970, № 2).
6. Taylor J., Rice M. Elastic-plastic properties of iron. J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, p. 364.
7. Jones O., Neilson F., Benedic W. Dynamics yield behaviour of explosively loaded metals determined by a Quartz transducer technique. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 11, p. 3224–3232.
8. Работнов Ю. Н. Модель упругопластической среды с запаздыванием текучести. ПМТФ, 1968, № 3.
9. Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В. О законе деформирования металлов при одноосном нагружении. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 3.
10. Marsh K. J., Cambell J. D. The effect of strain — rate on the post-yield flow of mild steel. J. Mech. and Phys. Solids, 1965, vol. 11, No. 1, p. 49–63.
11. Jonston W. G. Gilman J. J. Dislocation velocities, dislocation and plastic flow in lithium fluoride crystals. J. Appl. Phys., 1959, vol. 30, No. 129.
12. Butler J. F. Luders front propagation in low carbon steel. J. Mech. and Phys. Solids, 1962, vol. 10, p. 313.
13. Ломакин Е. В., Мельшанов А. Ф. Поведение малоуглеродистой стали при растяжении. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 4.
14. Баренблатт Г. И. О распространении шейки при растяжении полимерных образцов. ПММ, 1964, т. 88, вып. 6.
15. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений. В сб.: Вычислительные методы в гидродинамике. М., «Мир», 1967.
16. Нигматулин Р. И. Модель движения и ударные волны в двухфазных твердых телах с фазовыми переходами. ПМТФ, 1970, № 1.

Доклады Академии наук СССР  
1977. Том 237, № 6

УДК 532.529:66.040.3

ГИДРОМЕХАНИКА

Р. И. НИГМАТУЛИН, Р. Г. ШАГИЕВ, В. Ш. ШАГАПОВ,  
Г. Г. ВАЛЯВИН, В. В. ФРЯЗИНОВ, Б. И. НИГМАТУЛИН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ГИДРАВЛИЧЕСКОМ  
ПРИБЛИЖЕНИИ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ ПОТОКОВ С  
ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ И АНАЛИЗ ПРОЦЕССА НАГРЕВА  
НЕФТЯНОГО СЫРЬЯ В ТРУБЧАТЫХ ПЕЧАХ

(Представлено академиком В. В. Струминским 12 V 1977)

В энергетике и технологии часто используется совместное движение газа и жидкости в обогреваемом или необогреваемом канале со скоростями  $\geq 10$  м/сек. При этом в широком диапазоне давлений и скоростей реализуется дисперсно-кольцевой режим течения, характеризуемый наличием жидкой пленки на стенке и ядра потока, представляющего смесь газа и жидких капель. Для оценок можно считать, что этот режим имеет место при объемных газосодержаниях, больших  $\sim 0,8$ .

В настоящем сообщении изложена математическая модель гидродинамических и физико-химических процессов в многокомпонентных двухфазных потоках в дисперсно-кольцевом режиме течения, когда помимо фазовых переходов идут химические реакции, полнота прохождения которых зависит не только от нагрева, но и от чисто механических эффектов, определяющих, например, изменение давления и возможность испарения или конденсации. Именно такие ситуации специфичны для ряда современных интенсивных и энергоемких химико-технологических процессов, для расчета которых требуется совместное решение полной системы уравнений масс, импульсов, энергий фаз и кинетики различных межфазных и внутрифазных процессов.

Каждая из фаз в смеси газ+капли+пленка будет рассматриваться как гомогенная смесь ряда компонент. В жидких фазах идут химические реакции. Возможны процессы массообмена между фазами: испарение газа из жидкости, срыв и осаждение капель. Предполагается, что ядро потока и пленка имеют свои скорости, но температуры фаз совпадают, так как в рассматриваемых ниже процессах характерные длины выравнивания температур между фазами (так же как и скоростей газа и капель) во много раз меньше характерного линейного масштаба задачи (длины канала). Ниже используются представления, приведенные в (1-4). Параметры, относящиеся к газу, жидкой пленке и каплям, будем снабжать соответственно первыми индексами внизу 1, 2, 3 и называть параметрами первой, второй и третьей фаз.

Уравнения сохранения масс, импульсов фаз и энергии смеси в гидравлическом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dz} &= J_{(21)} + J_{(31)}, & \frac{dm_2}{dz} &= J_{(32)} - J_{(21)} - J_{(23)}, & \frac{dm_3}{dz} &= J_{(23)} - J_{(31)} - J_{(32)}, \\ (m_1 + m_3) \frac{dv_1}{dz} &= -(F_1 + F_3) \frac{dp}{dz} - f_{(12)} + (J_{(21)} + J_{(23)}) (v_{(21)} - v_1) + (\rho_1 F_1 + \rho_3 F_3) g, \\ m_2 \frac{dv_2}{dz} &= -F_2 \frac{dp}{dz} + f_{(12)} - f + J_{(32)} (v_{(32)} - v_2) + \rho_2 F_2 g, \end{aligned}$$

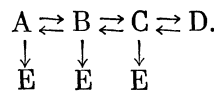
$$\frac{d}{dz} \left\{ \sum_{j=1}^3 m_j i_j \right\} = Q, \quad T_1 = T_2 = T_3 = T, \quad v_1 = v_3,$$

$$m_j = \rho_j^0 v_j^m F_j = \int_{F_j} \rho_j^{0'} v_j' d'F, \quad m_j v_j = \int_{F_j} \rho_j^{0'} (v_j')^2 d'F, \quad m_j i_j = \int_{F_j} \rho_j^{0'} v_j' i_j' d'F,$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = F(z), \quad F_1 = \alpha(F_1 + F_3), \quad m_1 + m_2 + m_3 = m = \text{const}, \\ v_j^m \approx v_j, \quad v_{(21)} \approx v_{(23)} \approx v_2, \quad v_{(32)} \approx v_1;$$

здесь  $m_j$  — поток  $j$ -й фазы,  $j=1, 2, 3$ ;  $\rho_j^0$  — средняя плотность материала  $j$ -й фазы,  $T$  — температура,  $v_j^m, v_j$  — среднемассовая и среднерасходная скорости фаз, при этом равенства в последней строчке приемлемы при турбулентных режимах, когда профили скоростей  $v_j'$  достаточно «наполненные»;  $i_j$  — среднерасходная энтальпия;  $F(z)$  — поперечное сечение канала (для трубы  $F = \text{const}$ ),  $F_j$  — часть поперечного сечения, занятая  $j$ -й фазой;  $\alpha$  — объемное содержание газа в ядре потока;  $f_{(12)}$  — сила трения на поверхности раздела газ — жидкая пленка;  $f$  — сила трения между пленкой и стенкой канала;  $Q$  — внешний приток тепла;  $J_{(ij)}$  — интенсивность массообмена от  $i$ -й к  $j$ -й фазе;  $v_{(ij)}$  — скорость массы, претерпевающей переход  $i \rightarrow j$ ;  $g$  — проекция внешних массовых сил вдоль оси канала.

Пусть газовая фаза состоит из легкой Е (с молекулярным весом  $\mu \approx 100$ ), тяжелой А (пары масла с  $\mu \approx 400$ ) и инертной (пары воды с  $\mu = 18$ ) компонент. Последняя не участвует в фазовых переходах и химических реакциях. Каждая из составляющих жидкой фазы — пленка и капли — состоит из четырех компонент: А — масла, В — смолы, С — асфальтены, D — карбоиды, которые претерпевают химические превращения по схеме



Параметры, относящиеся к компонентам А, В, С, D в пленке ( $j=2$ ) и каплях ( $j=3$ ), будут снабжаться соответственно индексами  $j2, j3, j4, j5$ , а параметры, относящиеся к инертному газу и компонентам Е, А в газовой фазе ( $j=1$ ), — индексами 10, 11, 12. Тогда уравнения масс компонент принимают вид

$$\frac{dm_{10}}{dz} = 0, \quad \frac{dm_{11}}{dz} = J_{(21)1} + J_{(31)1}, \quad \frac{dm_{12}}{dz} = J_{(21)2} + J_{(31)2},$$

$$\frac{dm_{2k}}{dz} = -J_{(21)k} - J_{(23)k} + J_{(32)k} + F_2 \sum_{l=2, l \neq k}^5 (K_{2,lk} - K_{2,kl}),$$

$$\frac{dm_{3k}}{dz} = -J_{(31)k} - J_{(32)k} + J_{(23)k} + F_3 \sum_{l=2, l \neq k}^5 (K_{3,lk} - K_{3,kl}),$$

$$m_{jk} = g_{jk} m_j; \quad J_{(ji)k} \approx g_{jk} J_{(ji)}; \quad i, j=1, 2, 3; \quad k, l=0, 1, \dots, 5;$$

здесь  $m_{jk}$  и  $g_{jk}$  — соответственно поток и массовая концентрация  $k$ -й компоненты в  $j$ -й фазе;  $J_{(ji)k}$  — интенсивность массопереноса  $k$ -й компоненты при фазовом переходе  $j \rightarrow i$ ;  $K_{j,kl}$  — скорость образования  $l$ -й компоненты из  $k$ -й компоненты в жидкой фазе ( $j=2$  в пленке,  $j=3$  в каплях) из-за химической реакции.

Будем считать, что газовая фаза — калорически совершенный газ с удельными теплотами парообразования  $L_1$  и  $L_2$  компонент А и Е ( $k=1, 2$ ).

$$p = \rho_1^0 R_1 T, \quad R_1 = \sum_{k=0}^2 g_{1k} R_{1k}, \quad i_1 = \sum_{k=0}^2 g_{1k} i_{1k}, \quad i_{10} = c_0 (T - T_0),$$

$$i_{11} = c_1 (T - T_0) + L_1, \quad i_{12} = c_2 (T - T_0) + L_2, \quad i_2 = i_3 = c (T - T_0).$$

Все теплофизические данные брали из (5). Выражения для  $f_{(12)}$ ,  $f$ , а также для интенсивности срыва  $J_{(23)}$  и осаждения  $J_{(32)}$  брали в соответствии с (2, 3). Местные сопротивления из-за поворотов трубы учитывали введением поправочного коэффициента  $\chi > 1$  в силе  $f$ .

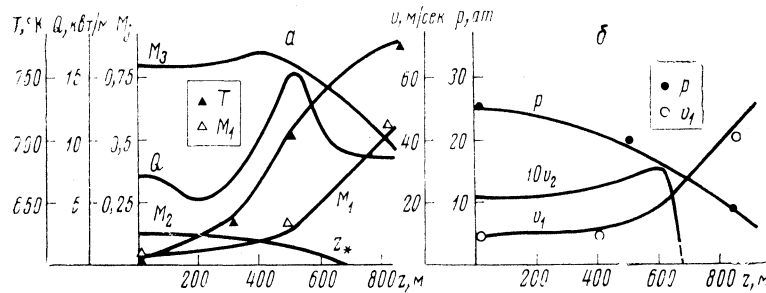


Рис. 1

Всю образующуюся в жидкой фазе компоненту Е полагали мгновенно испаряющейся ( $g_{21} = g_{31} = 0$ ); интенсивность испарения тяжелой компоненты А принимали в виде

$$J_{(j1)2} = \Phi_j (p_{2s} - p_{12}), \quad j = 2, 3,$$

где  $p_{2s}(T)$  и  $p_{12}$  — давление насыщения и парциальное давление компоненты А,  $\Phi_j$  — кинетический параметр. Оценки показывают, что значения  $\Phi_j$  достаточно велики, чтобы реализовывалось равновесное испарение ( $p_{12} = p_{2s}(T)$ ).

Скорость химической реакции задавали законом Аррениуса

$$K_{i,lk} = K_{i,lk}^0 \exp(-E_{lk}/RT),$$

где значения  $K_{i,lk}^0$ , зависящие от концентраций компоненты в  $i$ -й фазе, и  $E_{lk}$  брали согласно (6).

Приведенные уравнения образуют замкнутую систему. На рис. 1, где  $M_j = m_j/m$ , приведены результаты расчетов (кривые) вместе с экспериментальными данными (точки), полученными на действующем реакционном змеевике установки замедленного коксования (у.з.к.) с внутренним диаметром трубы  $D = 0,1$  м, общей длиной  $Z_0 = 850$  м и П-образными поворотами через каждые  $\sim 15$  м. Рассмотрен режим с расходом смеси  $m = 10$  кг/сек, газосодержанием на входе  $M_{10} = m_1(0)/m = 0,03$ , давлением на входе  $p_0 = 25$  бар и распределением теплоподвода  $Q(z)$ , показанным на рис. 1а. Упомянутый коэффициент местного сопротивления из-за поворотов трубы для данной конструкции был принят  $\chi = 1,54$  из условия совпадения расчетной и экспериментальной зависимости  $p(z)$  на одном режиме. Совпадение теоретических и экспериментальных данных для остальных параметров — первое свидетельство адекватности модели. Анализ показал удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных данных и на других режимах (другие  $m, M_{10}, p_0, Q(z)$ ). Таким образом, показана возможность проведения адекватного численного эксперимента на основе предложенной модели для изучения процесса в у.з.к.



Расчеты показывают наличие «кризиса второго рода», характеризуемого уменьшением (из-за испарения) до нуля в сечении  $z_*$  расхода и толщины жидкой пленки, что должно приводить к ухудшению теплоотдачи от стенки и повышению ее температуры. Последнее и является причиной наблюдаемого пережога труб и постепенного закоксовывания («склероза») проходного сечения из-за попадания капель на незащищенную пленкой раскаленную стенку трубы. Это подтверждается данными, показывающими, что пережог и закоксовывание наиболее характерны на участке  $z > z_*$ , где, согласно расчетам, поток полностью дисперсный, без пленки, причем пленка исчезает несмотря на наличие в сечении  $z_*$  большого количества жидкой фазы ( $M_3 \geq 0,7$ , см. рис. 1а). Дело в том, что подавляющая часть жидкости движется в виде капель в ядре и имеет скорость, практически совпадающую со скоростью газа ( $v_1 \approx v_3 \approx 20-50$  м/сек). Этот обнаруженный в расчетах факт подтверждается совпадением измеренных значений времени пребывания жидкой и газовой фаз в трубе.

В зависимости от вида исходного сырья с помощью численного эксперимента можно найти оптимальные значения конструктивных параметров  $D$ ,  $Z_0$  и управляющих параметров  $p_0$ ,  $m$ ,  $M_{10}$ ,  $Q(z)$ .

Рассмотренный в данной работе метод расчета газожидкостных течений многокомпонентных смесей с химическими реакциями и процессами массопереноса на примере течения в реакционном змеевике у.з.к. применим и к процессам термического крекинга, первичной перегонки нефти, пиролиза нефтепродуктов и т. д.

Авторы выражают благодарность акад. В. В. Струминскому, чл.-корр. АН СССР В. В. Кафарову, А. С. Эйгенсону за полезное обсуждение.

Поступило  
30 VI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Р. И. Нигматулин, ПММ, т. 34, № 6, 1097 (1970). <sup>2</sup> Б. И. Нигматулин, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 6, 141 (1971). <sup>3</sup> Б. И. Нигматулин, там же, № 4, 78 (1973). <sup>4</sup> И. И. Дорохов, В. В. Кафаров, Р. И. Нигматулин, ПММ, т. 39, № 3, 485 (1975). <sup>5</sup> Методы расчета теплофизических свойств газов и жидкостей, М., «Химия», 1974. <sup>6</sup> Г. Г. Валявин, В. С. Мартемьянов и др., Тр. Башкирск. н.-и. ин-та по переработке нефти, в. 13, 44, Уфа (1975).

Доклады Академии наук СССР  
1986. Том 286, № 1

УДК 532.593 : 532.584

ГИДРОМЕХАНИКА

Р.И. НИГМАТУЛИН, В.А. ПЫЖ

**УСИЛЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН  
В ВОДНОЙ СУСПЕНЗИИ ГЛИНИСТЫХ ЧАСТИЦ**

*(Представлено академиком Г.Г. Черным 20 XI 1984)*

При экспериментальном исследовании распространения ударных волн в водных суспензиях бентонита обнаружен эффект аномального повышения давления во фронте волны по сравнению с инициирующей эту волну импульсом [1]. В суспензиях, в которых основу твердой фазы в виде частиц коллоидного размера  $\delta \sim 10^{-8} - 10^{-7}$  м составляет минерал монтмориллонит с массовым содержанием  $c = 6\%$ , от опыта к опыту отмечено усиление этого эффекта при многократном ударном нагружении [2]. Глинистые "растворы" на основе монтмориллонита обладают повышенной кинетической устойчивостью при некоторой концентрации частиц в воде выше критической, выражающей свойство дисперсной системы не расслаиваться по высоте (время седиментации оценивается годами).

В данной работе представлены эксперименты с ударными волнами в суспензии с частицами другого очень распространенного класса глинистых минералов — каолинита. Сравнительно крупные частицы  $\delta \sim 10^{-6}$  м образуют суспензии, обладающие невысокой кинетической устойчивостью (скорость седиментации  $\sim 10^{-6}$  м/с) даже при больших концентрациях твердой фазы в воде — порядка нескольких десятков процентов.

Целью исследований является изучение закономерностей, связанных с аномальным "усилением" давления во фронте ударной волны, распространяющейся в гетерогенной системе, а также выявление влияния природы вещества дисперсной фазы на характер поведения ударной волны.

1. Опыты проведены в ударной трубе [2], волны в которой создавались за счет разрыва диафрагмы, отделяющей исследуемую двухфазную среду от камеры высокого давления. На свободную поверхность находящегося в покое семиметрового вертикального столба смеси внезапно прикладывается сжимающее усиление — давление  $P_e$  рабочего газа, аналогично непрерывно действующему поршню. По суспензии сверху вниз распространяется падающая волна сжатия, при этом вещество между фронтом волны и свободной поверхностью деформируется и приобретает некоторую скорость, направленную к нижнему торцу трубы. На жестком торце происходит отражение волны, фронт движется в противоположную сторону, поток вещества останавливается. При выходе отраженной волны сжатия на свободную поверхность жидкости образуется падающая волна разрежения, которая отражается от нижнего торца трубы, затем выходит на свободную поверхность, далее цикл повторяется.

Регистрация процесса распространения волн осуществлялась посредством малоинерционных преобразователей давления, расположенных вдоль трубы группами. Сигналы с двух измерительных датчиков каждой группы фиксировались на соответствующем двухлучевом осциллографе.

При изучении распространения волн в суспензиях глины один эксперимент представлял собой последовательность нескольких ударных нагружений столба

Рис. 1. Тарировочные осциллограммы и  $x, t$ -диаграмма волн сжатия и разрежения

дисперсной системы. Удары в эксперименте следовали друг за другом через 5–6 минут и были инициированы "поршнем" с одинаковым давлением рабочего газа  $P_e = 2,4$  МПа во всех представленных в работе опытах.

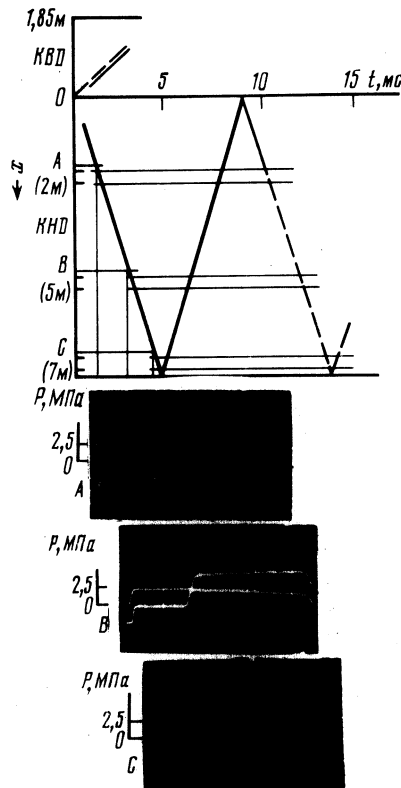
Для получения общей картины движения волн вдоль трубы использовались длительные развертки осциллографов  $\sim 10$  мс. По результатам измерений строили волновые диаграммы в плоскости,  $x$  – высота столба смеси,  $t$  – время. В начале и в конце каждой серии ударных нагрузений проводили тарировочные опыты в воде с целью контроля работы измерительного комплекса. Типичный тест показан на рис. 1. Интенсивность падающей волны  $P_1 \approx P_e = 2,4$  МПа, исходное давление смеси  $P_0 = 0,1$  МПа. Волновая диаграмма в координатах  $x, t$  поясняет процесс прохождения волн сжатия (сплошная жирная линия) и разрежения (штриховая). Осциллограммы, изображенные на верхней фотографии, отвечают сигналам с двух измерительных датчиков, отстающих вниз по потоку от диафрагмы примерно на 2 м (группа А), расстояние между ними  $\Delta x = 0,25$  м; верхний луч – сигнал с верхнего пьезодатчика в группе, а нижний – с нижнего. Тонкие горизонтальные линии на  $x, t$ -диаграммах обозначают расположение датчиков давления на трубе, их длина соответствует длительности развертки осциллографа данной группы. Осциллограммы давления групп датчиков В (5 м) и С (7 м) смещены друг относительно друга вдоль оси  $t$  на интервалы, регистрируемые специальными измерителями времени (тонкие вертикальные линии).

Медленный спад давления на нижней фотографии (группы С) объясняется стеканием электрического заряда с датчиков через входное сопротивление согласующего датчик и осциллограф преусилителя.

Анализ тестовых экспериментов показывает, что результаты находятся в согласии с акустическим приближением теории ударных волн. В частности, из  $x, t$ -диаграммы следует, что скорости падающих и отраженных волн близки к скорости звука в чистой воде.

2. Эксперимент из 10 ударных нагрузений водной суспензии каолинистого глинопорошка иллюстрирует волновые картины и осциллограммы на рис. 2, где показаны начальный удар, затем выборочно 5-й и 10-й. Интенсивность ударов, определяемая давлением в КВД поддерживалась одинаковой:  $P_e = 2,4$  МПа. Плотность смеси  $\rho_0 = 1,18 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, на  $m_e = 25$  кг воды приходилось  $m_s = 8,5$  кг глинопорошка, что соответствует массовой концентрации частиц в воде  $c = \frac{m_s}{m_e + m_s} \cdot 100 \approx 25\%$ .

Налицо качественные изменения в структуре фронта волны сжатия от опыта к опыту. Нарастает амплитуда скачка давления. Так, при первом ударе амплитуда



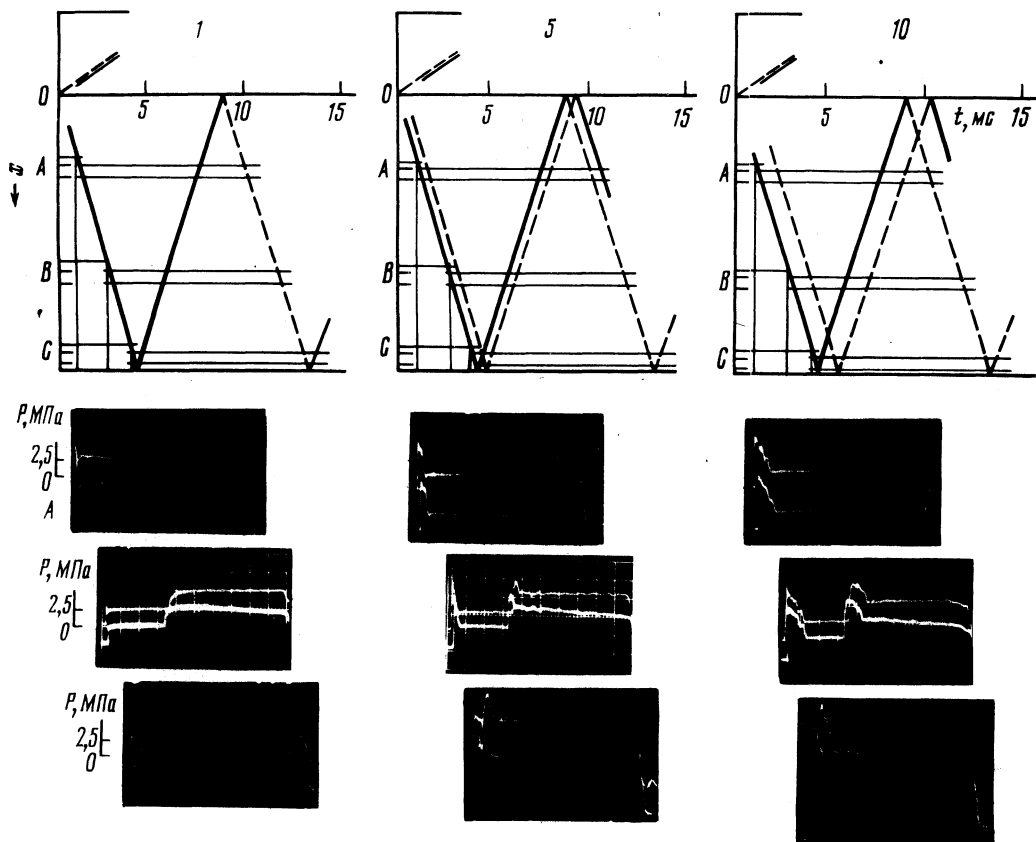


Рис. 2. Осциллограммы давления и  $x, t$ -диаграммы в эксперименте из 10 ударных нагружений водной суспензии коалинитовой глины ( $P_e = 2,4$  МПа,  $\rho_0 = 1,18 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 25\%$ ,  $P_0 = 0,1$  МПа)

фактически равна давлению  $P_1 \approx P_e = 2,4$  МПа, задаваемому "поршнем" из КВД. Постепенно, к четвертому–пятому опыту давление в скачке возрастает в 3–4 раза на 5–7 МПа выше инициирующего, остающегося постоянным при каждом ударе. Амплитуда стабилизируется, но происходит образование протяженной области избыточного давления  $\Delta P = P - P_1$  длительностью  $\Delta t$ , следующей за скачком (рис. 3а). Эта область со временем релаксирует до равновесного уровня давления  $P_1$  волны в воде при отсутствии частиц, инициированной импульсом такой же интенсивности. Спад  $\Delta P$  до нуля интерпретируется на  $x, t$ -диаграммах как волна разрежения, отстающая от скачка сжатия на время  $\Delta t$ . На рис. 3б приведены экспериментальные данные роста избыточного давления  $\Delta P_{\max}$ , а также длительности релаксационной зоны  $\Delta t$  в зависимости от номера удара  $n$ , которые характеризует описанный выше эффект при десятикратном ударном нагружении 25% суспензии коалинитовой глины. Здесь же приведены значения  $\Delta P_{\max}$  и  $\Delta t$  для  $n = 14, 15, 16$ , полученные в аналогичном эксперименте, проведенном в суспензии с массовым содержанием глины  $c \approx 33\%$ . С ростом концентрации частиц и номера удара  $n$  эффект усиливается.

Следует отметить, что во всех опытах скорости фронта падающей и отраженной волн одинаковы:  $D_1 = D_2 = 1450 \pm 50$  м/с; они близки к скорости звука в чистой воде. Осциллограммы давления показывают, что характер отражения волн сжатия и разрежения как от жесткого торца, так и от свободной поверхности смеси близок к акустическому.

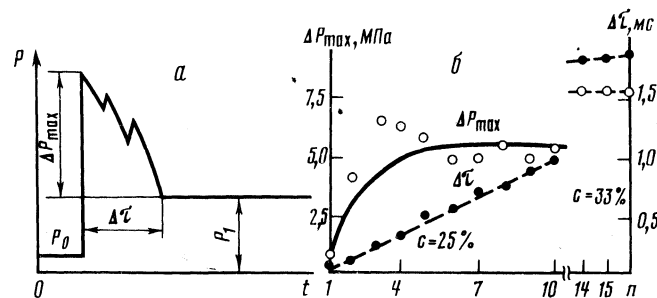


Рис. 3. Схема осциллограммы (а), график изменения параметров  $\Delta P_{\max}$  и  $\Delta \tau$  во фронте волны в зависимости от номера удара  $n$  ( $c = 25\%$ ,  $c = 33\%$ ) (б)

Многokратное воздействие ударными волнами на суспензию приводит к появлению в волне избыточного (относительно инициирующего импульса) давления, средняя величина которого монотонно возрастает от опыта к опыту. Усиление избыточного давления характеризуется постепенным ростом амплитуды, а также увеличением длительности зоны повышенного давления. Напомним, что ранее [2] аналогичный эффект во фронте ударной волны наблюдался в суспензиях, где основа дисперсной фазы минерал монтмориллонит с массовой концентрацией  $c = 6\%$  и  $\delta = 10^{-8} - 10^{-7}$  м. Однако в этих экспериментах рост  $\Delta \tau$  и самого давления в скачке происходит до четвертого удара, далее амплитуда и длительность зоны избыточного давления стабилизировались. В опытах в суспензии с каолиновыми частицами "насыщение"  $\Delta \tau$  намечается только после пятнадцатого–шестнадцатого удара при практически постоянной амплитуде  $\Delta P_{\max}$ .

Отметим еще одно отличие. В каолиновой суспензии с  $c = 20-30\%$  независимо от номера удара во всех опытах с инициирующим импульсом  $P_e = 2,4$  МПа, скорость распространения падающих и отраженных волн постоянна и практически не отличается от скорости звука в чистой воде – 1450 м/с, отражение волны от контактных поверхностей акустическое. В суспензии же с частицами монтмориллонита уже при концентрации  $c = 10-15\%$  в диапазоне инициирующих давлений  $P_e = 2-3$  МПа наблюдается ярко выраженная нелинейность: замедление движения фронта падающей волны до 450–250 м/с, неакустическое отражение от жесткой стенки  $P_2/P_1 = 7-15$  со скоростью, близкой к скорости звука в воде  $D_2 \approx 1450$  м/с ( $P_2$  и  $D_2$  – соответственно давление и скорость фронта отраженной волны) [3].

Институт механики  
Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова

Поступило  
20 XI 1984

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И., Пыж В.А., Симоненков И.Д. – Изв. вузов. Нефть и газ, 1983, № 11, с. 45–47.
2. Мирзаджанзаде А.Х., Нигматулин Р.И., Пыж В.А. – ДАН, 1984, т. 278, № 6, с. 1331–1334.
3. Пыж В.А. – Колл. журн., 1985, № 5, с. 894–900.

Proceedings of The 2nd International Conference on  
 Multiphase Flow '95-Kyoto  
 April 3-7, 1995  
 Kyoto, Japan

## Some Fundamentals and Applications, Paradoxes and Myths in Mechanics of Multiphase Flow

R. I. Nigmatulin

Tyumen Institute of Mechanics of Multiphase Systems  
 Ufa-Bashkortostan Branch of Russian Academy of Sciences  
 K. Marx, 6, Ufa, 450000, RUSSIA  
 Fax: +7-3472-22-3569 or +7-095-939-3088

Center for Multiphase Research, Rensselaer Polytechnic Institute  
 Troy, N.Y., 12180-3590, USA  
 Fax: +1-518-276-3590

### 1. ABSTRACT

Non-reversible multiphase flows are considered when it is necessary to take into account the different averaged fields of velocity, temperatures and pressures of the phases.

1. Short history of continua mechanics modeling of two-phase flow, using two fluid model is presented. The role of some Russian scientists is shown.

2. The relation between various popular forms of the two-fluid model is shown. The current state-of-the art in the modeling of interfacial and intraphase closure laws is summarized. New closure laws are proposed which attempt to account for the effect of dispersed phase interactions and achieve closure and well-posed models..

3. Quasi-static approximation (drift model) is considered. Non-trivial theoretical equations for slip velocity for dispersed and slug gas-liquid flows are derived. Juxtaposition of the derived equations with the Zuber-Findlay correlation is used as an experimental information to get the information on the interphase forces.

4. Some popular theoretical delusions and myths are presented.

5. Some unusual effects in two-phase flows are discussed.

6. A few non-traditional applications of multiphase systems in power, nuclear and thermonuclear, chemical, petroleum and safety engineering are discussed.

### 2. ON RUSSIAN SCIENTISTS CONTRIBUTION

In the 50es very popular equations, sets of the problems and their solutions were obtained by outstanding Russian scientists (Kh. Rakhmatulin, L. Landau & E. Lifshitz, A. Armand, N. Sliozkin, F. Frankl, S. Teletov, G. Barenblatt, etc.).

The first investigation using two-velocity model is the Landau-Lifshitz [1] theory of superfluid helium.

The first paper, where closed two-velocity fluid equations for multiphase flow with finite phase volume fractions  $\alpha_i$  were proposed, was that by Kh. Rakhmatulin [2] published in 1956. The case of  $N$ -phase mixture when all phases are ideal and barotropic was considered. The mass and momentum conservation equations of Rakhmatulin for two-phase mixture may be rewritten in the following now very popular form:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla^k \rho_1 v_1^k = 0 \quad (\rho_1 = \rho_1^0 \alpha_1), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla^k \rho_2 v_2^k = 0 \quad (\rho_2 = \rho_2^0 \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1),$$

$$\rho_1 \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_1^k - \bar{R}_{12} + \rho_1 \bar{g}, \quad (2.2)$$

$$\rho_2 \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_2^k + \bar{R}_{12} + \rho_2 \bar{g} \quad \left( \frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \nabla \right).$$

Here  $\alpha_i$ ,  $\rho_i^0$ ,  $\rho_i$  and  $\bar{v}_i$  are the volume concentration, the true density, reduced or superficial density and the velocity of the  $i$ -th phase ( $i = 1, 2$ ); then  $\sigma_i^{kl}$  is the stress tensor in the  $i$ -th phase,  $\bar{R}_{12}$ ,  $\bar{g}$  are the interfacial force and the external body force correspondingly. These conservation equations were closed by the following equations:

$$\sigma_1^{kl} = -\alpha_1 p_1 \delta^{kl}, \quad \sigma_2^{kl} = -\alpha_2 p_2 \delta^{kl}, \quad p = p_1 = p_2, \quad (2.3)$$

$$\bar{R}_{12} = p \bar{\nabla} \alpha_2 + K(\bar{v}_1 - \bar{v}_2),$$

where  $K$  was designated as a force interaction function. The component  $p \bar{\nabla} \alpha_2$  in interface force is very principal; it should be denoted as the **Rakhmatulin force**.

In the same paper Kh. Rakhmatulin investigated the characteristics of his two-velocity system of equations and proved that it is non-hyperbolic (see Section 5).

Later, Kh. Rakhmatulin [2] solved the linear problem of supersonic two-velocity flow around a thin body and showed that one of the phases cannot flow the body: from one side its trajectories intersect the body surface causing the reflection and the third velocity field; from the other side its trajectories do not reach the body surface.

The equations of Rakhmatulin were generalized by Kraiko & Sternin [3], Nikolaevskiy [4], Nigmatulin [5].

### 3. ON THE DIFFERENT FORMS OF MOMENTUM EQUATIONS FOR DISPERSED MIXTURES

The stress tensor  $\sigma_i^{kl}$  in the  $i$ -th phase is:

$$\sigma_i^{kl} = \alpha_i \langle \sigma_i^{kl} \rangle_i + \alpha_i \langle \rho_i^\circ \Delta v_i^{lk} \Delta v_i^{ll} \rangle_i \quad (3.1)$$

$$(\Delta v_i^{lk} \equiv v_i^{lk} - v_i^k, \quad v_i^k \equiv \langle v_i^{lk} \rangle_i)$$

where  $\langle \rangle_i$  corresponds to the  $i$ -th phase averaging: time (Ishii [6], Delhaye [7]), spatial (Nigmatulin [8-10]), ensemble (Arnold, Drew & Lahey [11]);  $v_i^{lk}$  is the local instantaneous velocity of the  $i$ -th phase which has fluctuations  $\Delta v_i^{lk}$  relative to the averaged velocity  $v_i^k$ .

Equations (2.1) may be rewritten as follows:

$$\rho_1^\circ \alpha_1 \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} = \nabla^k (\alpha_1 \bar{\sigma}_1^{ok}) - \bar{R}_{12} + \rho_1^\circ \alpha_1 \bar{g}, \quad (3.2)$$

$$\rho_2^\circ \alpha_2 \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} = \nabla^k (\alpha_2 \bar{\sigma}_2^{ok}) + \bar{R}_{12} + \rho_2^\circ \alpha_2 \bar{g}$$

$$\sigma_i^{kl} \equiv \alpha_i \sigma_i^{okl}, \quad \sigma_i^{okl} = \langle \sigma_i^{okl} \rangle_i + \langle \rho_i^\circ \Delta v_i^{lk} \Delta v_i^{ll} \rangle_i.$$

For a mono-dispersed structure with spherical particles (or drops or bubbles):

$$\alpha_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad (3.3)$$

where  $a$  and  $n$  are the radius and number density of the dispersed particles. If the number of the particles in the mixture is fixed (no coagulation, breaking down and annihilation), then:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla^k n v_2^k = 0. \quad (3.4)$$

Let us consider a macroscopic representative volume for averaging  $\delta V = \delta V_1 + \delta V_2$  (see Fig. 3.1) bounded by the surface  $\delta S = \delta S_1 + \delta S_2$ . Interfacial surface,  $\delta S_{12}$ , into the volume  $\delta V$  may be divided into two parts:  $\delta S_{12S}$  is the parts of interfacial surfaces of the  $\delta N_S$  dispersed particles, which are intersected by the boundary,  $\delta S$ , and  $\delta S_{12V}$  are the interfaces of  $\delta N_V$  dispersed particles which are completely in the volume  $\delta V$ . In accordance with this division the interfacial force  $\bar{R}_{12}$  may be divided into two parts too: the gradient part  $\nabla^k \bar{\sigma}_{12}^k$ , which determines the interfacial force from the interface,  $\delta S_{12S}$ , near the boundary  $\delta S$ , and  $n \bar{f}_{12}$  from the interface  $\delta S_{12V}$ , thus (Nigmatulin [8, 9, 10]):

$$\bar{R}_{12} = \nabla^k \bar{\sigma}_{12}^k + n \bar{f}_{12}. \quad (3.5)$$

Here  $\bar{\sigma}_{12}^k$  is the tensor of the interfacial forces, and  $\bar{f}_{12}$  is the force from the carrier phase per dispersed particle. Then momentum equations (2.2) may be rewritten as:

$$\rho_1 \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_{1*}^k - n \bar{f}_{12} + \rho_1 \bar{g}, \quad \sigma_{1*}^{kl} \equiv \sigma_1^{kl} - \sigma_{12}^{kl}, \quad (3.6)$$

$$\rho_2 \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_{2*}^k + n \bar{f}_{12} + \rho_2 \bar{g}, \quad \sigma_{2*}^{kl} \equiv \sigma_2^{kl} + \sigma_{12}^{kl}.$$

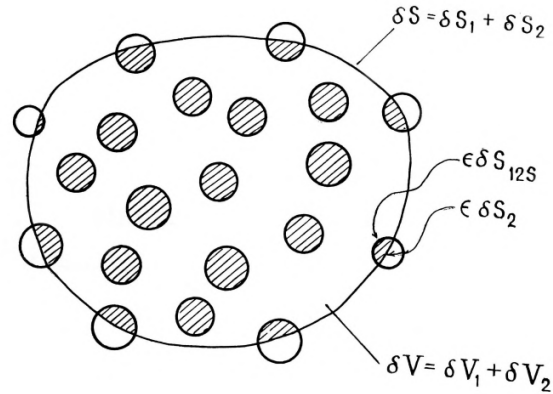


Fig. 3.1.

The stress tensor  $\sigma_{i*}^{kl}$  ( $i = 1, 2$ ) is called the effective stress tensor of the  $i$ -th phase. It is easy to show (Nigmatulin [8, 9, 10]), that, if there is no fluctuational momentum transfer by

random motions of particles (i.e.,  $\langle \rho_i^\circ \Delta v_i^{lk} \Delta v_i^{ll} \rangle_i = 0$ ), and no direct interparticle interactions (for instance, due to the contacts or collisions between the dispersed particles or due to electromagnetic fields), then the effective stress tensor for dispersed phase is negligibly small and the momentum equation for the dispersed phase must correspond to

$$\bar{\sigma}_{2*}^k = \bar{\sigma}_2^k + \bar{\sigma}_{12}^k = 0, \quad \rho_2 \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} = n \bar{f}_{12} + \rho_2 \bar{g}. \quad (3.7)$$

We may partition out the Archimedes force,  $\bar{f}_A$ :

$$\bar{f}_{12} \equiv \bar{f}_A + \bar{f}_*, \quad n \bar{f}_A = \alpha_2 \rho_1^\circ \left( \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} - \bar{g} \right), \quad (3.8)$$

$$\bar{f}_* \equiv \bar{f}_m + \bar{f}_\mu + \bar{f}_L + \dots$$

The component  $\bar{f}_*$ , connected with the relative motion of a particle in the carrier fluid may be calculated from a consideration of a particle motion in a fluid without external forces and acceleration (Batchelor [12], Sedov [13], Nigmatulin [8, 9, 10]) and includes the virtual mass force  $\bar{f}_m$  (inertia forces in the relative motion), the drag or viscous force  $\bar{f}_\mu$ , the lateral lift force,  $\bar{f}_L$ , and other components due to rotation.

After simple transformations phasic momentum equations may be rewritten identically to (2.2), or (3.3), or (3.6):

$$\rho_1 \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} = \alpha_1 \nabla^k \bar{\sigma}_{1*}^k - \alpha_1 n \bar{f}_* + \rho_1 \bar{g},$$

$$\rho_2 \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} = \alpha_2 \nabla^k \bar{\sigma}_{2*}^k + \alpha_1 n \bar{f}_* + \rho_2 \bar{g} + \nabla^k \bar{\sigma}_{2*}^k, \quad (3.9)$$

$$n \bar{f}_A \equiv \alpha_2 \rho_1^\circ \left( \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} - \bar{g} \right) = \alpha_2 \nabla^k \bar{\sigma}_{1*}^k - \alpha_2 n \bar{f}_*.$$

There can be different treatments of the volume fractions,  $\alpha_i$ , in the first gradient terms on the right sides on the momentum equations (see (3.3), (3.6), (3.9)) depending on that what part of

the interphase force is included in this term:

$$\bar{R}_{12} \equiv \nabla^k \bar{\sigma}_{12}^k + n \bar{f}_{12} \equiv \nabla^k \bar{\sigma}_{12}^k + \alpha_2 \nabla^k \bar{\sigma}_{1*}^k + \alpha_1 n \bar{f}_* . \quad (3.10)$$

4. SOME THEORETICAL EXPRESSIONS FOR INTRA- AND INTERPHASE FORCES

There are some mathematically derived expressions for the stress tensor  $\bar{\sigma}_{1*}^k$  and the hydromechanical force  $\bar{f}_*$  for a case without direct interparticle interactions (3.7). These calculations start with the analytical piecewise approximation of the micro-fields ( $\sigma_1^{kl}$  and  $v_1^k$ ) of the carrier fluid by potential or creeping flow within the finite cell around each spherical particle by the parts of the corresponding infinite flow for one sphere.

Using the Voinov [14] velocity potential<sup>1</sup> for a flow of ideal incompressible fluid around one compressing or expanding sphere in the cell and applying spatial and ensemble averaging, the following formulae were obtained (Nigmatulin [8, 9, 10] when  $\alpha_2^{1/2} \ll 1$ :

$$\sigma_{1*}^{kl} \equiv \sigma_1^{kl} - \sigma_{12}^{kl} = -(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_{1a}) \delta^{kl} + \alpha_2 \rho_1^\circ \Pi^{kl} = \quad (4.1)$$

$$\equiv -p_{1*} \delta^{kl} + \tau_{1*}^{kl},$$

$$p_{1*} = -\frac{1}{3} \sigma_{1*}^{kk}, \quad \tau_{1*}^{kl} = -\frac{1}{2} \alpha_2 \rho_1^\circ [w_{12}^k w_{12}^l - \frac{1}{3} (w_{12})^2 \delta^{kl}].$$

$$\sigma_1^{kl} = -\alpha_1 p_1 \delta^{kl} + \alpha_2 \rho_1^\circ \Pi_{11}^{kl}, \quad -\sigma_{12}^{kl} = -\alpha_2 p_{1a} \delta^{kl} + \alpha_2 \rho_1^\circ \Pi_{21}^{kl},$$

$$\frac{p_{1a}}{\rho_1^\circ} = \frac{p_1}{\rho_1^\circ} + a \frac{dw_{1a}}{dt} + \frac{3w_{1a}^2}{2} - \frac{w_{12}^2}{4}, \quad w_{12}^k = v_1^k - v_2^k, \quad w_{1a} = \frac{d_2 a}{dt}$$

$$= -w_{1a}^2 \delta^{kl} - \frac{3}{20} w_{12}^2 \delta^{kl} - \frac{1}{20} w_{12}^k w_{12}^l,$$

$$\Pi_{21}^{kl} = \frac{3}{20} w_{12}^2 \delta^{kl} - \frac{9}{20} w_{12}^k w_{12}^l, \quad \Pi^{kl} = -w_{1a}^2 \delta^{kl} - \frac{1}{2} w_{12}^k w_{12}^l,$$

$$n \bar{f}_* = \frac{1}{2} \rho_1^\circ \alpha_2 \left( \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} - \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} + \frac{3}{a} \frac{d_2 a}{dt} \bar{w}_{12} \right).$$

Here  $w_{1a}$  is the radial velocity of the carrier liquid on the spherical particle surface because of the variable radius  $a$  (see Section 16),  $w_{12}$  is the slip velocity of the phases,  $p_{1a}$  denotes the averaged interfacial pressure on the surface of a dispersed spherical particle.

The expression for  $\Pi^{kl}$  corresponds to the equations obtained by Ganpov [15], Petrov and Voinov [16,17], Biesheuvel & Wijngaarden [18]. The expression for  $\Pi_{11}^{kl}$  with  $\Pi_{21}^{kl}$  missed was derived by Iordanskiy [19]; Arnold, Drew & Lahey [11] obtained the same formulae but for the case  $w_{1a} = 0$  and used somewhat different presentation of the ensemble averaging.

Note that for the case where the flow is without accelerations and external forces ( $d_1 \bar{v}_1/dt = d_2 \bar{v}_2/dt = \bar{g} = 0$ )

<sup>1</sup>This potential generalizes a classical one for a flow around a sphere taking into account a non-uniform linear non-rotational velocity distribution far from the sphere:

$$(v_1^k - v_2^k)_{r \rightarrow \infty} \rightarrow w_\infty^k + v_\infty^{kl} x^l, \quad (v_\infty^{kl} = v^{lk}).$$

The classical potential corresponds to  $v_\infty^{kl} = 0$ . Due to  $v_\infty^{kl}$  the influence of non-rotational non-uniformity ( $\nabla^k v_1^l$ ) of the carrier fluid averaged velocity field is taken into account. It may be shown (Nigmatulin [8, 9]) that  $v_\infty^{kl} = \nabla^k v_1^l - \frac{1}{3} \delta^{kl} \nabla^m v_1^m$ . even if  $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 \neq 0$ ,  $\bar{\nabla} \alpha_2 \neq 0$ , equations (3.11) together with (4.1) imply the d'Alembert "paradox":  $\bar{f}_{12} = \bar{f}_* = 0$ . It is just a

consequence of using of potential flow for one sphere in an unbounded flow. The same potential was used by Wallis [20] to derive more general equations for the potential flow.

For the creep flow of a non-compressible viscous fluid within a cell using a part of the velocity field of Happel and Brenner [21] for one expanding or contracting sphere in an unbounded volume, the

following equations were obtained (Nigmatulin [8, 9]) for  $\alpha_2^{1/2} \ll 1$ :

$$\sigma_{1*}^{kl} \equiv \sigma_1^{kl} - \sigma_{12}^{kl} = -(p_1 + \frac{4}{3} \mu_1 e^{mm}) \delta^{kl} + 2\mu (e^{kl} - \frac{1}{3} e^{mm} \delta^{kl})$$

$$e^{kl} \equiv (\nabla^k v_1^l + \nabla^l v_1^k), \quad (e^{mm} = \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{a}, \quad w_{1a} = \frac{d_2 a}{dt}),$$

$$v^k \equiv \alpha_1 v_1^k + \alpha_2 v_2^k, \quad \mu = \mu_1 (1 + \frac{5}{2} \alpha_2), \quad (4.2)$$

$$\bar{f}_* = \bar{f}_\mu = 6\pi \mu_1 a \phi_\mu (\bar{v}_1 - \bar{v}_2), \quad \phi_\mu = 1 + \frac{3}{2} \alpha_2^{1/2} + O(\alpha_2^{2/3}).$$

Here  $\mu_1$  is the viscosity of the liquid and  $\mu$  is the effective viscosity of the dispersed mixture determined by the famous Einstein formula.

Effects of the rotating particles in the viscous liquid, surface tension and phase transition, together with the formulae for other averaged parameters of intra- and interphase interactions (fluctuating kinetic energy transport, volume viscosity, dissipation of kinetic energy intensity, etc.) are presented by Nigmatulin [8, 9,10].

Two-velocity system of equations (3.9) with assumption (3.7) and closure equations (4.1) or (4.2) is non-hyperbolic, even if these equations are generalized for compressible phases

( $\rho_i^\circ = \rho_i^\circ(p_i)$  ( $i = 1, 2$ )). The non-hyperbolicity of two-velocity equations has been marked by Rakhmatulin [1] Kraiko & Sternin [3], Banerjee & Hancox [22], Biesheuvel & Wijngaarden [23], Jones & Prosperetty [24] and others. The first aspect of non-hyperbolicity are possible non-correctness (ill-posedness) of the Cauchy problem and complications with the numerical solutions.

In Fig. 4.1 the typical dependences for increment  $\lambda$  on wave number  $k = 2\pi/L$  (where  $L$  is the wave length) of the (free) disturbance

$$A(k) e^{\lambda(k) \cdot t} \cdot \sin[k(x - C(k) \cdot t) + \varphi] \quad (4.3)$$

of some solution corresponding to some system of equations is presented. If  $\lambda(k) < 0$ , the solution is stable for this disturbance; if  $\lambda(k) > 0$ , the solution is not stable for this disturbance; if  $\lambda \rightarrow \infty$ , the problem is ill-posed (non-correct). The latter is possible if the system of equations is non-hyperbolic.

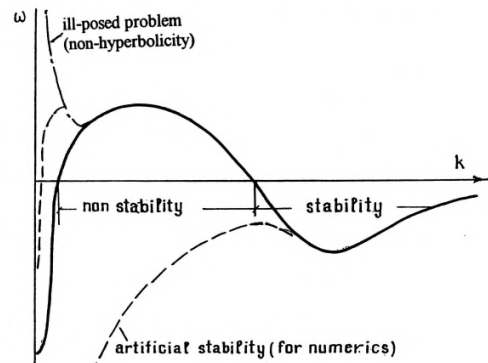


Fig. 4.1

The mathematical investigation showed (Klebanov et al. [25], Nigmatulin [10]) that for the two-velocity system of equations under consideration the Cauchy problem is conventionally correct. It means that if we consider only smooth enough solutions of the system and their localized disturbances, for instance in the class of unboundedly



differentiable functions ( $A(k) \rightarrow 0$  for  $k \rightarrow 0$ ), then the Cauchy problem may be correct: there is some  $t' > 0$ , so that  $A(k) \cdot e^{\lambda(k)t}$  is bounded value for any  $k$  and  $t < t'$ . This makes the problem of non-hyperbolicity of the two-velocity system of equation (3.6) with (3.7) not dramatic.

The second aspect of the non-hyperbolicity problem is the question: "What processes should be taken into account in the model under consideration to make the model hyperbolic ( $\lambda \neq \infty$ )?" It was shown (Nigmatulin [10]) that it is necessary to take into account **interparticle interactions**.

## 5. DIFFERENT SCHEMES OF INTERPARTICLE INTERACTIONS IN DISPERSED MIXTURES

It is possible to separate a few schemes for increasing levels of interparticle interactions.

a) **No Interparticle Interaction** ( $\rho_2 \ll \rho_1$ ,  $\alpha_2 \ll 1$ ). For this case there is no influence of the dispersed particles on the carrier phase and each other. The interface force is essential in the equation only for the dispersed phase and determined by the formula for the force  $f_*^\circ$  on one particle in an unbounded flow of the carrier phase:

$$\rho_1 \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_1^k + \rho_1 \bar{g}, \quad \rho_2 \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} = n \bar{f}_{12}^\circ + \rho_2 \bar{g}, \quad (5.1)$$

$$(\sigma_1 \equiv \sigma_{1*} \equiv \sigma_1^\circ \approx -p), \quad n \bar{f}_* = n \bar{f}_*^\circ.$$

b) **The Additive Influence of the Dispersed Particles on the Carrier Phase** ( $\alpha_2 \ll 1$ ,  $\rho_2 \sim \rho_1$ ). In this case it is necessary to take into account the reaction of the dispersed phase on the continuous phase but the interface force is determined by the same relation (5.1) as in the previous case. As in the previous case in this formulation hydrodynamic interaction between the particles through the carrier liquid does not influence **the formula for the interface force**  $\bar{f}_{12} = \bar{f}_{12}^\circ$ , which does not take into account "non-singleness" of the dispersed particles, considering that interparticle distances are many times more than the radius of the particles  $a$ . Nevertheless, the force field  $n \bar{f}_{12}^\circ$  influences the velocity field of the carrier fluid. In spite of the absence of direct interactions between the dispersed particles (i.e., collisions, etc.) and of the explicit hydrodynamic influence of the set of the particles on the force per particle the dispersed phase influences indirectly or implicitly itself through the carrier phase.

c) **Non-Additive Manifestation of the Dispersed Phase with Direct Hydromechanic Interaction Between the Dispersed Particles** ( $10^{-2} < \alpha_2 < 10^{-1}$ ). In this case typical distances between the dispersed particles are about  $(2.5 \div 6)a$ . These distances are large enough so that direct contacts between the particles are not important (i.e.,  $\sigma_{2*}^{kl} = 0$ ), but they are not large enough to neglect the disturbances from neighbouring particles on the surface of a given (testing) particle for the calculation of the force  $\bar{f}_*$  per particle. These disturbances influence the formula for the averaged force that may be taken into account by "collectiveness coefficients",  $\varphi_m$  and  $\varphi_\mu$  and others for the different components of the interface force:

$$\bar{f}_* = \bar{f}_m + \bar{f}_\mu + \dots, \quad (5.2)$$

$$\bar{f}_m = (1 + \varphi_m(\alpha_2)) \bar{f}_m^\circ, \quad \bar{f}_\mu = (1 + \varphi_\mu(\alpha_2)) \bar{f}_\mu^\circ, \dots$$

A theoretical calculation of the coefficients  $\varphi_m$ ,  $\varphi_\mu$  is a non-trivial problem for they depend on the distribution of the dispersed

particles relative to each other and on the hydrodynamic regime. In particular, for the creep flow for a regular distribution of the dispersed particles, as in a lattice, when the cell model is appropriate (see (4.2), Happel & Brenner [21], Nigmatulin [8, 9, 10]), we have

$$\varphi_\mu(\alpha_2) = (1 + 2) \alpha_2^{1/2} + O(\alpha_2^{3/2}). \quad (5.3)$$

In contrast, for a chaotic distribution of the dispersed particles (Batchelor [26], Golovin & Tchijov [27], Nigmatulin [8, 9, 10])

$$\varphi_\mu(\alpha_2) = (5 + 6) \alpha_2 + O(\alpha_2^2). \quad (5.4)$$

There are a few models for  $\varphi_m(\alpha_2)$  (Zuber [28], Wijngaarden [29], Drew & Lahey [29a]) giving an increasing virtual mass coefficient with increasing  $\alpha_2$ .

The system of equations in this case (c) does not differ essentially from the previous case (b). Though the differential operator and its hyperbolicity are influenced by the coefficient  $\varphi_m$ , this influence is not essential when variations of  $\varphi_m$  are substantiated by physics.

d) **The Additional Components in Interfacial Force Due to Gradients of Volume Concentration and Velocity Field of the Dispersed Phase.** It is necessary to take into account that all previous systems of equations are **non-hyperbolic**. The defect in the models is due to the fact that in the previous approximations, in the momentum equation, there were no dispersed phase forces which prevented unrealistic increases of volume fraction of the dispersed phase (Nigmatulin [10]). Collectiveness cannot be taken into account properly only by coefficients depending on  $\alpha_2$ .

First of all, such forces may be connected with the additional components  $\bar{f}_{\nabla\alpha}$  and  $\bar{f}_{\nabla v}$  in the interfacial force  $\bar{f}_*$ , which are determined by the influence of the gradient of volume concentration ( $\nabla^k \alpha_2$ ) and velocity field ( $\nabla^k v_2^l$ ) of the dispersed phase, respectively.

If the dependences on  $\nabla^k \alpha_2$  for the additional hydrodynamic components of interfacial forces are linear, then on the basis of dimensional analysis and invariance principle it may be shown (Drew & Whallis [30]) that the general expressions for these force components for non-viscous potential flow and viscous creeping flow may be written as

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\nabla\alpha}^k &= \mu_1 a^2 M_{\nabla\alpha}^{klm} (v_1^l - v_2^l) \nabla^m \alpha_2, \\ \bar{f}_{\nabla v}^k &= \rho_1^\circ a C_{\nabla\alpha}^{klmn} (v_1^l - v_2^l) (v_1^m - v_2^m) \nabla^n \alpha_2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

There is a problem to find and consider the proper hydrodynamic schemes for the calculation of these components and the corresponding coefficients  $C_{\nabla\alpha}^{klmn}$  and  $M_{\nabla\alpha}^{klm}$ .

In a few papers some formulae which looked like a derivation of  $C_{\nabla\alpha}^{klmn}$  were used. It follows from a consideration of averaged pressure,  $p_{1a} = \langle p' \rangle_{12}$ , on a **single** sphere ( $a = \text{const}$ ) by potential flow around it (see (4.1)) that:

$$\langle p' \rangle_{12} = p_\infty - \frac{1}{4} \rho_1^\circ (v_1 - v_2)^2, \quad p_\infty = p_1. \quad (5.6)$$

Then the Rakhmatulin force (see (2.3)) is rewritten as follows:

$$R_{12}^k = \dots - \langle p' \rangle_{12} \nabla^k \alpha_2, \quad (5.7)$$

and in the interphase force there is the component

$$\frac{1}{4} \rho_1^\circ (v_1 - v_2)^2 \nabla^k \alpha_2, \quad (5.8)$$

which corresponds to the first component in (5.5). But this derivation may be considered as heuristic only or taking some part of the force and neglecting another part of the same order. It is because the derivation uses the distribution of pressure,  $p'$ , for the flow around one particle in an **unbounded** flow and, in particular, does not take into account the influence due to the gradient of volume concentration,  $\nabla^k \alpha_2$ .

A qualitative analysis (Nigmatulin et al. [31]) of the influence of the gradient of the dispersed phase velocity field  $v_2$  on the force per particle led to the formula with the coefficient  $\lambda_{2H}$ :

$$\bar{f}_{\nabla v} = \lambda_{2H} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}, \quad (5.9)$$

This term corresponds to the volume viscosity of the dispersed phase in the carrier fluid. A dimensional analysis shows that general forms for "volume viscosity" of the dispersed phase for non-viscous potential flow and creeping flow are:

$$\begin{aligned} \lambda_{2H} &= C_{2\mu} \mu_1 a^2 (\alpha_2)^q \\ \lambda_{2H} &= C_{2p} \rho_1 a^3 (v_1 - v_2) (\alpha_2)^r \end{aligned} \quad (5.10)$$

where  $C_{2\mu}$ ,  $C_{2p}$ ,  $q$  and  $r$  are the non-dimensional coefficients and exponents, which must be determined experimentally or calculated using more detailed theory.

**e) Non-Hydrodynamic Compression Viscosity and The Pressure of the Dispersed Phase Pseudo-Gas.**

If for the scheme of Fig. 5.1 there are no hydrodynamic effects and external forces on the dispersed particles, they move without acceleration. The trailing particle having a larger velocity (that corresponds to the "compression" of the pseudo-gas) will overtake the leading particle, and there will be an overturning of the "compression" wave and a violation of the single-valuedness of the velocity distribution function,  $v_2(x, t)$ , along the  $x$ -axis. To prevent from having the two-value function,  $v_2(x, t)$ , and to conserve the two-

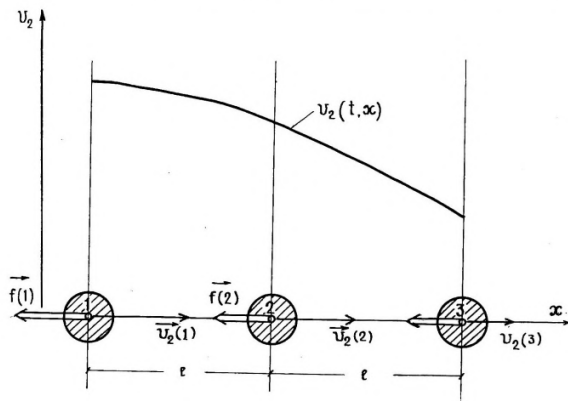


Fig. 5.1.

velocity model for this usual situation, it is possible to average the corresponding two values of the velocities for a given point at the moment of passing or intersecting the trajectories. A qualitative analysis showed that this averaging corresponds to the action of the Reynolds stress component (having in mind  $\Delta v_2^x \sim \Delta v_2$ ) of the stress tensor  $\sigma_{2*}^{kl}$  (see (3.1))

$$\alpha_2 \left( \rho_2^\circ \Delta v_2^x \Delta v_2^x \right)_2 \sim \rho_2^\circ \alpha_2 \left[ l \frac{\partial v_2}{\partial x} \right]^2 \sim \rho_2^\circ \alpha_2^{1/3} a^2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 \quad (5.11)$$

This "rheological" state equation for one-dimensional compressible flow of the dispersed "pseudo-gas" corresponds to a fluid with the non-linear volume viscosity  $\lambda_2$  for compression ( $\partial v_2 / \partial x < 0$ ).

By analogy, it is possible to introduce a "hydrostatic pseudo-gas pressure" in the stress tensor  $\sigma_{2*}^{kl}$  (Nigmatulin [10]), which increases with the increase of the particle volume concentration,  $\alpha_2$ :

$$p_{2*} = p_{20} (\alpha_2)^a. \quad (5.12)$$

This artificial "pressure" corresponding to the direct force interaction between the dispersed particles (see below) will prevent from any overturning of the compression wave hampering the intersection of the dispersed phase "pseudo-gas" trajectories.

Expressions (5.11) and (5.12) may be generalized for three-dimensional flow assuming isotropy and the absence of shear stresses for the dispersed "pseudo-gas":

$$\sigma_{2*}^{kl} = -p_{2*} \delta^{kl}, \quad p_{2*} = p_{20} (\alpha_2)^a + \lambda_2 (\nabla^m v_2^m)^2; \quad (5.13)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} > 0, & \text{if } \nabla^m v_2^m \leq 0 \\ < 0, & \text{if } \nabla^m v_2^m > 0 \end{cases}, \quad p_{20} > 0.$$

These "rheological" correlations make the "pseudo-gas" momentum equation similar to that for a compressible viscous gas.

**g) Direct Interparticle Interactions due Collisions and Intensive Turbulent Random Particle Motion.**

When the volume concentration of the particle is large enough, interparticle collisions and contacts take place, that resulting in explicitly including the specified stress tensor of the dispersed phase  $\bar{\sigma}_{2*}^k$ . For dispersed fluids the intensity of interparticle interactions increases with the intensity of random or fluctuating motions of the dispersed particles determined by the kinetic energy of the fluctuating motion,  $k_2$ , per unit of the mass of the dispersed phase. An analysis of the interparticle collisions (Goldshik [32], Nigmatulin [10]), using the ideas of thermodynamics and statistical physics of a solid body and taking into account that for some volume concentration there is a densely packed particle system, where  $k_2$  is a zero, but the stress tensor,  $\sigma_{2*}^{kl}$ , and pressure,  $p_{2*}$ , may not be zeroes, gives the following formula,

$$-\frac{1}{3} \sigma_{2*}^{kk} = p_{2*} = \frac{\gamma_2 - 1}{\beta_2(\alpha_2)} \rho_2 k_2, \quad (\beta_2(\alpha_2) \approx 1 - 1,16 \alpha_2^{1/3}). \quad (5.14)$$

Here  $\gamma_2 \sim 1$  is the coefficient analogous to the Grunneisen coefficient in thermodynamics of a solid body.

For relatively small volume fractions of the dispersed particles, when the direct force interaction between the particles is negligible, the pressure  $p_{2*}$  is determined only by the "Reynolds stress" momentum transfer due to chaotic motion (see (3.1)):

$$p_{2*} = -\frac{1}{3} \sigma_{2*}^{kk} = \frac{1}{3} \rho_2^\circ \alpha_2 \langle \Delta v_2^k \Delta v_2^k \rangle_2 = \frac{2}{3} \rho_2^\circ \alpha_2 k_2, \quad (5.15)$$

$$(\beta = 1, \gamma_2 = \frac{5}{3}).$$

Using the interparticle pressure requires an equation for the kinetic energy of fluctuation of the dispersed particles (Goldshik [32], Nigmatulin [8, 10]):

$$\rho_2 \frac{d_2 k_2}{dt} = -\nabla^l K_{(k)} \nabla^l k_2 + \sigma_{2*}^{kl} \nabla^k v_2^l + G_{(k)} - D_{(k)}. \quad (5.16)$$

Here the first term on the right side denotes the macroscopic transfer of the fluctuational kinetic energy ("pseudo-heat" transfer),

characterized by the fluctuation energy transfer coefficient  $K_{(k)}$ , the second term is the energy exchange between the macroscopic and fluctuational energy (analogous to the internal forces power due to deformation in classical continua mechanics), and  $G_{(k)}$  and  $D_{(k)}$  are the generation and dissipation of the fluctuation energy, respectively. The generation is determined by the turbulence in the carrier phase, relative motion of the phases and by the rotation of the particles. The dissipation is determined by the viscosity of the carrier phase and kinetic energy losses during mutual collisions of the particles (see Goldshtik [26], Nigmatulin [8, 10] and Alajbegovic [33]).

6. SOME EXAMPLES OF TWO-VELOCITIES FLOWS

Figure 6.1 represents computed phase streamlines of the three-velocity plane flow by gas-particle suspension (quartz-sand particles and air) with supersonic velocity over a blunt body. Because of the reflected particles from the plate it is necessary to use three-velocity (three-fluid) continua: the first phase is gas, the second phase is a fraction of arriving particles, and the third phase is a fraction of the particles reflected from a rigid surface. All these phases interact with each other, in particular the arriving particles interact with the reflected ones due to collisions, and each of the particle fractions interacts with the carrier phase (air) by drag (aerodynamics) force. There are retreating shock waves (line 1), through which the disturbances from the immersed body cannot penetrate into the incident flow and separatrix (line 2) enveloping the averaged streamlines of the reflected particles (the third phase). One may find a strong increase of the reflected particles on the separatrix.

The next example is connected with the convective combustion of air suspension. Let the fuel particles be ignited in some volume of gas suspension. The large volume of the hot gas from the ignited particles displace the cold gas, thereby permitting the volume occupied by the burning particles to heat and ignite new particles trailing the cold

gas. With a sufficiently intensive gas release in the combustion zone the gas temperature near the non-ignited particles may rise, not because of gas longitudinal thermal conductivity, but because of longitudinal convection. Hot products of the reaction form a combustion zone which consists of two regions: a region where the non-burning particles are heated by gas only, and a region where the particles are burning. The hot-gas front affects the medium ahead of it similar to a piston producing a disturbance zone in the cold gas; the cold gas moves in this

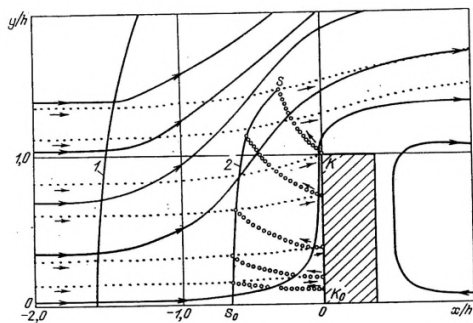


Fig 6.1. The gas streamlines (thin lines), incident particle streamlines (dotted lines), and reflected particle streamlines (circles) in the plane, transversal, monodisperse gas-suspension flow over a plate of height  $h = 10 \text{ cm}$ ; gas-particle suspension: air with the quartzsand particles,

$p_0 = 0.1 \text{ MPa}$ ,  $T_0 = 293 \text{ K}$ ,  $a = 30 \mu\text{m}$ ,  $M = 3.0$  ( $L^{(v)} / h = 4.1$ ,  $\bar{\rho}_{20} = \rho_{20} / \rho_{10} = 1.0$ ). Line 1 represents the retreating shock wave, line 2 represents the separatrix enveloping the streamlines of reflected particles and separating the zone with reflected particles.

zone passing the non-burning particles and flowing over them. For convective combustion to develop, the cold gas in the disturbance zone should not carry away the cold particles prior to the arrival of the hot gases. The intensity of the removal depends on the particle inertia, the quantity of particles, and aerodynamic forces from gas. When occurring in the zone of the hot gases, the cold particles are ignited and release hot gas while burning out. As a result, the combustion front in the gas suspension may accelerate, thereby producing a shock wave ahead of the cold gas that leads to detonation (explosion) combustion.

If particles in the disturbed zone become involved in motion before the arrival of the hot-gas front, the combustion-front propagation may cease, since the particles do not continue to feed the combustion zone any longer and slow down the gas motion.

Thus, the convective combustion may change into detonation (explosion), and may decay.

Figures 6.2 and 6.3 illustrate the numerical-integration results that reflect the pressure distribution evolution in the process of convective combustion of air suspension when it transforms into detonation (Fig. 6.2, where the fuel concentration is high) and when it decays (Fig. 6.3). In Fig. 6.3 one can see an interesting "two-velocity" effect associated with the gradual entrainment of fuel particles by gas. This particle entrainment within the "cold" gas region is reasonable for reduction of particles entering the combustion zone. The number particle concentration is reduced as if they are "swept out" by "cold" wind behind the front compression wave and "pushed" by hot gas out of the combustion zone. As a result, the convective front, at a certain point of time, begins to decelerate, and soon the combustion ceases in this case.

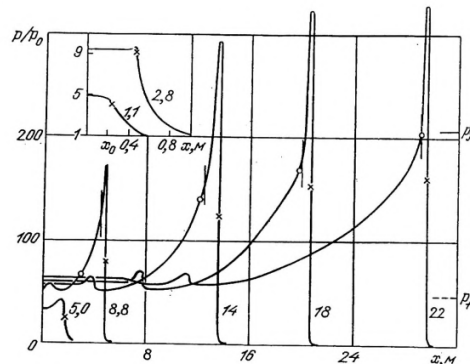


Fig 6.2. Pressure distribution at various times during the transition of unitary-fuel convective burning to detonation in an air suspension (air + powder particles,  $p_0 = 0.1 \text{ MPa}$ ,  $\rho_{20} = 11.5 \text{ kg/m}^3$ ,  $2a_0 = 100 \mu\text{m}$ ) caused by gas temperature rise to  $T_* = 820 \text{ K}$  in the zone ( $0 \leq x \leq x_0$ ) of length  $x_0 = 0.2 \text{ m}$ . Numerical labels on the curves indicate time (ms). Crosses on the curves indicate the points of particle ignition, circles indicate points of

The next example (Fig. 6.4) illustrates the situation when two-velocity effects are not essential themselves but even small they may initiate another process; in this case, fragmentation of the bubbles that increases interfacial surface density and thus intensifies interfacial heat and mass transfer (evaporation) having great influence on hydrodynamics. This example deals with explosion flashing of high pressure and high temperature liquid (water) from the closed vessel (tube) because of a sudden destruction of one bottom and rarefaction waves penetrating into the vessel from the outside. Here the stage of the bubbly regime is considered when slip velocity of the bubbles  $v_2 - v_1$  is small as compared to the carrier liquid velocity  $v_1$ :

$$v_2 - v_1 < 0.5 \text{ m/s}, \quad v_1 \sim 10 \div 10^2 \text{ m/s},$$

and the velocity of the bubbles at any moment may be calculated on calculating the non-steady carrier liquid or mixture velocity  $v \approx v_1$  distribution by one velocity model (scheme (5.1)). But the slip determines the Weber number characterizing the intensity of fragmentation of the bubbles by Kelvin-Helmholtz instability (Nigmatulin [8, 10]):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla^k n v_2^k = \psi, \quad \psi = \psi(\text{We}), \quad \text{We} = \frac{2\rho_g^0 (v_2 - v_1)^2 a}{\Sigma},$$

where  $\Sigma$  is the surface tension. It is small density of the gas,  $\rho_g^0$ , but not large density of the liquid,  $\rho_l^0$  that determines the critical condition of fragmentation.

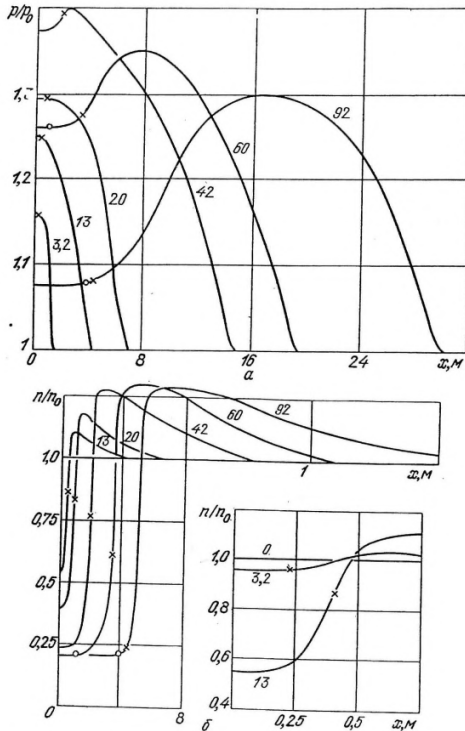


Fig 6.3. Distribution of pressure (a), particle concentration (b), of gas (solid lines) and particles (dashed lines) in the process of decaying convective combustion of the air-unitary fuel suspension (air + powder particles,  $p_0 = 0.1$  MPa,  $T_0 = 293$  K,  $\rho_{20} = 0.86$  kg/m<sup>3</sup>,  $2a_0 = 100$   $\mu$ m) due to the gas temperature rise ( $T_s = 820$  K) in the zone  $0 \leq x \leq x_0 = 0.2$  m. The labels and indicators are the same as in Figure 6.2.

Figure 6.4 shows both calculated and experimental (Edwards & O'Brien, 1970) oscillograms of variation in pressure  $p$  and volumetric vapor content  $\alpha_2$  with time at a fixed section ( $x = 1.39$  m from the closed end) of the tube  $L = 4.1$  m long. At the initial state  $t < 0$  the closed tube contained subcooled water under high pressure:  $p_0 = 6.9$  MPa,  $T_0 = 515$  K (saturation pressure  $p_s(T_0) = 3.5$  MPa - dashed line),  $n_0 = 0.5 \cdot 10^9$  m<sup>-3</sup>,  $a_0 = 10$  mkm are initial number concentration and initial radius of nuclei particles (sites of evaporation) determined by the quality of the water. The solid line corresponds to the experiment, dashed line - to equilibrium approximation ( $T = T_s(p)$ ), dotted line - to non-equilibrium approximation of evaporation on the interface of the fixed number of bubbles without fragmentation ( $\psi = 0$ ), and dashed-dotted line - to the same non-equilibrium approximation of evaporation but with the increase in the number of the bubbles (due to fragmentation). It is seen that accounting of the thermal non-equilibrium (metastable) delay of evaporation improves (compared to the equilibrium approximation) the correlation with the experiment till  $t < 0.15$  s for pressure but not for void fraction. Moreover, for  $t > 0.15$  s experimental pressure and void fraction evolution curves are from another side from the "equilibrium" curves. This paradox is explained by the existence of a slow fragmentation wave propagating after evaporation front and strongly intensifying the process. For  $t \approx 0.1$  s the front of this wave is at a distance of about 1 m from the open end ( $x \approx 3.1$  m) or 1.7 m from the point under consideration. The intensive evaporation (which looks like vapor explosion) takes place in the open end zone  $\sim 1$  m long, compensating and delaying the pressure drop and evaporation in the point under consideration ( $x \approx 3.1$  m) in Fig. 6.4 due to the outflow of the mixture.

The given paradoxical discrepancy between the equilibrium and non-equilibrium ( $\psi = 0$ ) theories and the experiment was proposed by J. Hewitt at the London Workshop (1991) as a problem for understanding.

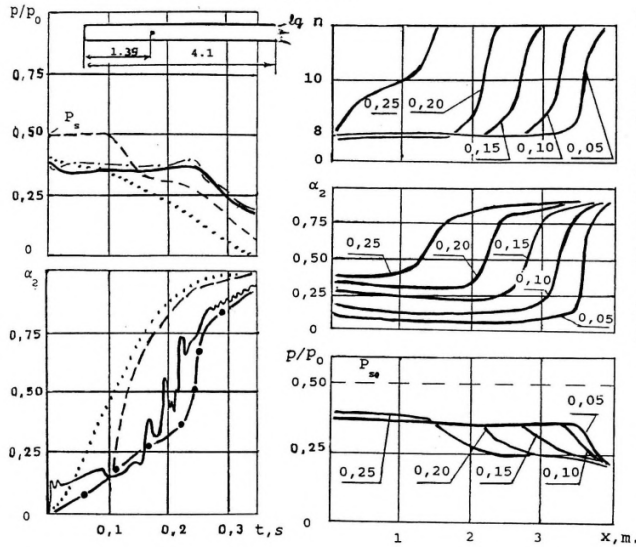


Fig. 6.4.

### 7. DRIFT FLUX MODEL APPROXIMATION

Let us consider a two-phase flow of non-compressible phases in a pipe with a constant cross section  $A$  for a circular tube with the diameter  $D$ .

There will be used averaged volume (cross sectional) concentrations of phases  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ , averaged volumetric flux densities or superficial velocities of the phases  $j_j$ , and of the mixture  $j = j_1 + j_2$  (total volume flow rate density), and the averaged velocities of the phases  $v_j \equiv j_j/\alpha_j$ .

Mass balance equations for phases (2.1) taking into account non-compressibility of the phases lead to the total volume flow rate integral:

$$j \equiv \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = j(t). \tag{7.1}$$

The main assumption of the drift flux approximation (Wallis [34], Nigmatulin [10]) is a neglect of inertia forces.

Then momentum conservation equations (3.6) in the one-dimensional approximation for a dispersed flow without any direct interaction between the dispersed particles (3.7) may be presented as follows:



$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - M_{12} - F_{W1} + \rho_1^0 \alpha_1 g^x, \quad (7.2)$$

$$0 = M_{12} - F_{W2} + \rho_2^0 \alpha_2 g^x \quad (M_{12} = n f_{12}).$$

On the right sides there are forces due to the gradient of pressure  $p$ , the interface force  $M_{12}$  between the first and the second phases, external interactions between the phases with the tube wall ( $F_{W1}$  and  $F_{W2}$ ) and finally gravity forces.

On detaching the Archimedes force  $n f_A$  (see (3.10)), determined for the inertia free flow only by the gravity acceleration,  $M_{12}$  may be expressed as

$$M_{12} = M_A + M_*, \quad f_{12} = f_A + f_*,$$

$$M_A = n f_A = \rho_1^0 \alpha_2 g^x, \quad M_* = n f_*, \quad (7.3)$$

Then from the first equation of (7.2) we will have a non-trivial expression for the Archimedes force

$$n f_A = \rho_1^0 \alpha_2 g^x = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_2 M_* - \alpha_2 F_{W1}, \quad (7.4)$$

and the momentum equations in the following form

$$0 = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \alpha_1 M_* - \alpha_1 F_{W1} + \rho_1^0 \alpha_2 g^x, \quad (7.5)$$

$$0 = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_1 M_* - \alpha_2 F_{W1} - F_{W2} + \rho_2^0 \alpha_2 g^x, \quad (M_* = n f_*).$$

Note that in this form due to detaching the Archimedes force from the interface one, expressing it through the gradient of pressure by formula (6.8), in the momentum equation for the second (dispersed) phase there is some part of the external force, acting on the first phase from the wall ( $\alpha_2 F_{W1}$ ).

Summarizing these equations and subtracting them after dividing on  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  correspondingly we have another identical form of these equations:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - F_{W2} - F_{W1} + (\rho_1^0 \alpha_1 + \rho_2^0 \alpha_2) g^x = 0, \quad (7.6)$$

$$M_* - F_{W2} + (\rho_2^0 - \rho_1^0) \alpha_2 g^x = 0.$$

## 8. CLOSURE EQUATIONS FOR DRIFT FLUX THEORY

To close the system of equations (2.1), (7.2) it is necessary to write the equations for the forces  $M_*$ ,  $F_{W1}$ ,  $F_{W2}$ .

Interphase force:

$$f_* = \pi a^2 C_{12} \frac{\rho_1^0 |v_1 - v_2| (v_1 - v_2)}{2}, \quad n = \frac{3\alpha_2}{4\pi a^3}, \quad (8.1)$$

$$C_{12} = \frac{A^{(\gamma)}}{Re_{12}^{1-\gamma}} \frac{1}{1 - \psi_2(\alpha_2, \bar{\rho}^0, Lp_{12})}, \quad A^{(\gamma)} = \text{const}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

$$Re_{12} = \frac{2a |v_1 - v_2|}{\mu_1 / \rho_1^0}, \quad Lp_{12} = \frac{2a \rho_1^0 \Sigma}{\mu_1^2}, \quad \bar{\rho}^0 = \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}$$

Here  $C_{12}$  is the drag coefficient related to one dispersed particle (drop, bubble);  $\psi(\alpha_2)$  is the coefficient taking into account the influence of "collectiveness", shape and dimension changes (disintegration or coalescence); the exponent  $\gamma$  determines the interfacial force dependence on the slip velocity:

$$M_{12} = \alpha_2 K_{12}^{(\gamma)}(\alpha_2) \cdot |v_1 - v_2|^\gamma (v_1 - v_2), \quad (8.2)$$

$$K_{12}^{(\gamma)}(\alpha_2) = \frac{3A^{(\gamma)} \rho_1^0}{8a} \left( \frac{\mu_1}{2a \rho_1^0} \right)^{1-\gamma} \frac{\alpha_1}{1 - \psi_2(\alpha_2)}$$

The wall interaction on the carrier phase is:

$$F_{W1} = \frac{\pi D \tau_{W1}}{\frac{1}{4} \pi D^2} = \frac{4\tau_{W1}}{D}, \quad \tau_{W1} = C_D \frac{\rho_1^0 |v_1| v_1}{2} \frac{1}{1 - \psi_D(\alpha_2)},$$

$$C_D = C_D(Re_1, \bar{\Delta}), \quad Re_1 = \frac{\rho_1^0 v_1 D}{\mu_1}. \quad (8.3)$$

Here  $C_D$  is the drag force coefficient,  $\bar{\Delta} \equiv \Delta/D$  is relative roughness; the coefficient  $\psi_D$  takes into account the influence of disturbances because of the dispersed phase on the wall friction force with the carrier phase.

For practice, the most typical is the square dependence of the wall friction on  $v_1$ :

$$F_{W1} = K_1(\alpha_2) |v_1| v_1, \quad K_1(\alpha_2) = \frac{2\rho_1^0}{D} \frac{C_D}{1 - \psi_D(\alpha_2)}. \quad (8.4)$$

At first sight it seems natural to neglect the direct wall interaction on the dispersed phase ( $F_{W2} = 0$ ), supposing that contacts between the dispersed particles and the wall are absent. Nevertheless, for the gas with liquid drops and solid particles flows such contacts may occur ( $F_{W2} \neq 0$ ) due to collisions and reflections. But even for bubbly up flows the measurements of the void fraction distribution show the anomalously high concentration of the bubbles not only near the wall (Nakoryakov et al. [36], Heringe & Davis [37], Sekoguchi et al., [38, 39], Serizawa et al. [40, 41]), but even on and along the wall (see Fig. 8.1), where the bubbles are pressed to the wall, **contact**<sup>2</sup> with the wall and move along the wall with the velocity  $v_{2W} \neq v_2$ . It means that the contacts may initiate the direct force  $F_{2W}$ :

$$F_{W2} = \frac{\alpha_2 \pi D \tau_{W2}^0}{\frac{1}{4} \pi D^2} = \frac{4\alpha_2 \tau_{W2}^0}{D} \quad (\tau_{W2}^0 = K_2 v_{2W}). \quad (8.5)$$

where  $K_2$  is the dispersed particle and wall interaction coefficient and depends on the parameters of the flow.

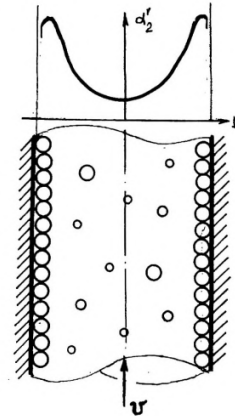


Fig. 8.1.

9. THE EQUATIONS FOR THE PRESSURE GRADIENT AND FOR THE SLIP VELOCITY IN DISPERSED FLOW.

From momentum conservation equations (7.2) one has equations for the pressure drop and for slip velocity

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - K_1 |v_1 - v_2| - F_{W2} + (\rho_1^0 \alpha_1 + \rho_2^0 \alpha_2) g^x = 0, \quad (9.1)$$

$$-K_{12}^{(\gamma)} (\alpha_2 - |v_2 - v_1|)^\gamma (v_1 - v_2) + \frac{F_{W2}}{\alpha_2} + (\rho_1^0 - \rho_2^0) g^x = 0.$$

It is naturally to propose that the force,  $F_{W2}$ , is much smaller than the interphase force:  $F_{W2}/\alpha_2 \ll (\rho_1^0 - \rho_2^0)g$ . Then the slip velocity equation may be presented in a simplified approximation for the upward flow ( $g^x = -g$ )

$$v_2 - v_1 = \left[ \frac{(\rho_1^0 - \rho_2^0)g}{K_{12}^{(\gamma)}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \left( 1 - \frac{F_{W2}/\alpha_2}{(\gamma+1)(\rho_1^0 - \rho_2^0)g} \right). \quad (9.2)$$

One should note that the slip velocity is not influenced directly by the external wall friction force ( $F_{W1}$ ) in the first (carrier) phase. The external wall force influences the slip velocity only through the dispersed phase ( $F_{W2}$ ). It is important that this slip velocity equation fits the dispersed flows where one of the phase is surrounded by the other only and is acted by the Archimedes force from the carrier phase. This slip velocity equation does not fit an annular flow but may be generalized for a slug flow.

10. MODEL FOR THE VERTICAL SLUG UP FLOW

The slug upward vertical flow is characterized by the so called **Taylor bubble** which has the shape of a bullet (Fig. 10.1). Both theory and experiment show that the head surface of the Taylor bubble is close to spherical with the radius  $R_H \approx \frac{3}{8}D$ . Below the surface is turned asymptotically to cylindrical separated from the wall by a liquid *film*, the thickness of the film decreasing smoothly from  $\delta \approx \frac{1}{8}D$  to some fixed value  $\delta \approx \delta_\infty$ . The lateral interface  $S_{Bf}$  between the Taylor bubble and the film may be wavy. Macroscopically it may be considered as close to cylindrical with smoothly variable radius  $R_B(x)$ .

Very often the film separating the Taylor bubble from the tube wall is thin, and the length  $L_B$  of the Taylor bubble is long as compared to the diameter of the tube:

$$2\delta = D - 2R_B \ll D, \quad L_B \gg D. \quad (10.1)$$

That is why there is a sense to characterize the lateral surface of the Taylor bubble by the averaged diameter  $\langle D_2 \rangle$  corresponding to the averaged film thickness  $\langle \delta_f \rangle$ :

$$2 \left( \frac{3}{8}D \right) < \langle D_2 \rangle < D - 2\delta_\infty, \quad \delta_\infty < \langle \delta_f \rangle < \frac{1}{8}D. \quad (10.2)$$

The Taylor bubbles separate from each other with liquid layers designated as (liquid) *slugs*. Here we consider the case when the bubble volume content in the slugs is negligibly small.

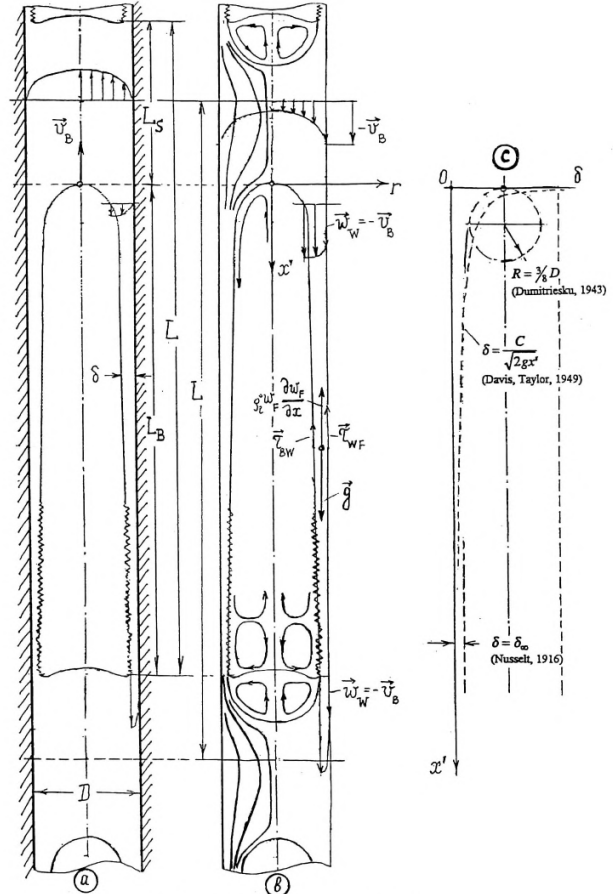


Fig. 10.1. Taylor bubble in a vertical pipe: (a) in coordinates fixed with the pipe; (b) in coordinates moving with the bubble; (c) Taylor bubble shape asymptotics;

The slug borders on the Taylor bubble by the wavy down surface  $S_{ds}$  which may be considered as close to plane.

For simplification, let us consider a periodical slug flow. Having in mind long slugs ( $L_B \gg D$ ) mainly, let us consider one period or a representative cell of the flow (see Fig. 10.1) with the volume  $V$  and length  $L$  bounded by up,  $S_u$ , and down,  $S_d$ , planes and cylindrical surface of the tube wall  $S_W$  having one Taylor bubble with the volume  $V_2 \equiv V_B$ :

$$V = \frac{1}{4}\pi D^2 L, \quad V_2 \equiv V_B \approx \frac{1}{4}\pi \langle D_2 \rangle^2 L_2, \quad (10.3)$$

$$S_u = S_d = \frac{1}{4}\pi D^2, \quad S_W = \pi D L.$$

For a given void fraction  $\alpha_2$  presented only by the Taylor bubble volume  $V_B \equiv V_2 \equiv \alpha_2 V$ , the length of the Taylor bubble  $L_2$  may be presented in the following way:

$$L_2 - R_H = \frac{1 - \bar{d}}{(1 - \bar{\delta})^2} \alpha_2 L, \quad (10.4)$$

$$\left( \alpha_2 = \frac{V_2}{V}, \quad \bar{d} = \frac{9}{256} \frac{D}{L} \ll 1, \quad \bar{\delta} \equiv \frac{2\langle \delta_f \rangle}{D} \ll 1 \right).$$

The liquid or carrier phase in the cell has three components: the first is the liquid in the up volume  $V_{1u}$  over the Taylor bubble having the volume averaged axial velocity  $v_{1u}$ , the second is in the down volume  $V_{1d}$  under the Taylor bubble

<sup>2</sup> This phenomenon is seen explicitly on the video made by collaborators of Dr. J. Bataille at the Laboratory of Fluid Mechanics and Acoustics of Central School in Lyon.

having the volume averaged velocity  $v_{1d}$  and the third is in the film volume  $V_{1f}$  having the volume averaged axial velocity  $v_{1f}$ . It is shown below that  $v_{1u} = v_{1d}$ , that is why there is a sense to use the averaged velocity and length of the liquid slug

$$v_{1s} = v_{1u} = v_{1d}, \quad L_s = L - L_2, \quad V_s = V - V_2. \quad (10.5)$$

In this case the averaged velocity of the carrier liquid  $v_1$  and volume concentration  $\alpha_1$  together with the volume concentrations of the given components are:

$$\alpha_1 = \alpha_{1s} + \alpha_{1f}, \quad \alpha_1 v_1 = \alpha_{1s} v_{1s} + \alpha_{1f} v_{1f}. \quad (10.6)$$

Due to periodicity, the velocity distributions and corresponding averaged values on the up section  $S_u$  and down section  $S_d$  are the same.

The velocity of the Taylor bubble  $v_B$  is the averaged one of the gas phase  $v_2$  ( $v_B = v_2$ ).

The averaged mass conservation equations for this two-fluid model are the same as (7.4).

Each cross section  $S$  of the tube consists of two parts:  $S_1(z)$  and  $S_2(z)$  occupied by liquid and gas correspondingly. There is a sense to use the surface average velocities on the sections:

$$v_1^{(S)}(z) = \frac{1}{S_1} \int_{S_1(z)} v_1' ds, \quad w_1^{(S)}(z) = \frac{1}{S_1} \int_{S_1(z)} w_1' ds = v_1^{(S)}(z) - v_B, \quad \tau_{Bf} = C_{Bf} \frac{\rho_g^0 (v_B - v_{Bf})^2}{2},$$

The velocity field relative to the Taylor bubble is steady in the cell and corresponds to non-compressible fluid. Then we have

$$w_1^{(S)}(z) S_1(z) = (v_1^{(S)}(z) - v_B) S_1(z) = -w_1^0 S = \text{const}. \quad (10.7)$$

It follows from this equation that  $v_{1u} = v_{1d}$  as in (10.5).

This equation may be used to express the volume averaged velocity of the liquid:

$$v_1 = v_B - w_1^0 / \alpha_1. \quad (10.8)$$

By analogy, using (10.12) one may write for the film with a small thickness  $\delta(z)$

$$\frac{1}{4} \pi D^2 w_{1s} = \pi D \delta(z) w_{1f}(z), \quad w_{1s} = v_{1s} - v_B, \quad w_{1f}(z) = v_{1f}(z) - v_B. \quad (10.9)$$

Then the expressions for the averaged velocities of the liquid slug and varying with the distance averaged velocity of the liquid in the near wall film (when it is thin) are:

$$v_{1s} = v_B - w_1^0, \quad v_{1f}(z) = v_B - w_1^0 \frac{D}{4\delta(z)}. \quad (10.10)$$

## 11. MOMENTUM EQUATIONS FOR A VERTICAL SLUG FLOW

The momentum equation for the inertia free two-phase system follows from the equilibrium equation for the cell

$$\frac{\partial p}{\partial x} - F_{W1} - [\rho_1^0 \alpha_1 + \rho_2^0 \alpha_2] g^x = 0, \quad F_{W1} = F_{Ws} + F_{Wf}, \quad (11.1)$$

$$F_{Ws} = \frac{4\tau_{Ws}}{D} \frac{L_s}{L}, \quad F_{Wf} = \frac{4\tau_{Wf}}{D} \frac{L_f}{L} \quad (L_s + L_f = L).$$

where  $\tau_{Ws}$  and  $\tau_{Wf}$  are the averaged tangent viscous stresses on the tube wall corresponding to the slug and film parts of the cell.

The equilibrium equation for the gas in the Taylor bubble is

determined by the equilibrium of interface forces  $M_{12}$  on the surface  $S_B = S_{Bf} + S_{Bu} + S_{Bd}$  and gravity force

$$M_{12} + \rho_2^0 \alpha_2 g^x = 0. \quad (11.2)$$

The interface force  $M_{12}$  related to the unit volume of the cell consists of three components: Archimedes force  $M_A$ , viscous friction force  $M_f$  on the film surface, and drag or aerodynamic force  $M_s$  on the up,  $S_{Bu}$ , and down,  $S_{Bd}$ , interface surfaces of the Taylor bubble; these forces may be presented in the following form taking into account (10.4):

$$M_{12} = M_A + M_s + M_f, \quad M_A = -\rho_1^0 \alpha_2 g^x, \quad (11.3)$$

$$M_s = -C_{Bs} \rho_1^0 \frac{(v_{1s} - v_B)^2}{2} \cdot \frac{1/4 \langle D_2 \rangle^2}{1/4 D^2 L} = -C_{Bs} \rho_1^0 (w_1^0)^2 \frac{(1-\bar{\delta})^2}{2L}$$

$$C_{Bs} = \frac{A^{(\gamma)}}{\text{Re}_{Bs}^{1-\gamma}}, \quad \text{Re}_{Bs} = \frac{w_1^0 \langle D_2 \rangle}{\mu_l / \rho_l^0}, \quad A^{(\gamma)}, \gamma = \text{const}$$

$$M_f = -\frac{\pi \langle D_2 \rangle (L_2 - R_H) \tau_{Bf}}{1/4 \pi D^2 L} = -\frac{4\tau_{Bf}}{D} \alpha_2 \frac{1-\bar{\delta}}{1-\bar{\delta}},$$

$$C_{Bf} = \frac{A_{Bf}}{\text{Re}_{Bf}^{1-\gamma_{Bf}}}, \quad \text{Re}_{Bf} = \frac{(v_B - v_{Bf}) D_2}{\mu_g / \rho_g^0}, \quad A_{Bf}, \gamma_{Bf} = \text{const}.$$

Here  $\tau_{Bf}$  is the averaged tangent viscous stress on the surface of the film  $S_{Bf}$  determined by the velocity of the Taylor bubble  $v_B$  relative to the velocity of the liquid  $v_{Bf}$  on  $S_{Bf}$ .

The multiplier  $1/L$  in the expression for  $M_s$  corresponds to the decrease of the drag force per unit volume for the longer Taylor bubble and fixed void fraction  $\alpha_2$  due to decreasing in the number of the Taylor bubbles per unit length.

The interface force  $M_s$  is determined mainly by the wake flow near the bottom of the Taylor bubble. The interface force  $M_f$  depends strongly on the intensity of waves on  $S_{Bf}$ , that is determined by Reynolds and Weber numbers of the film.

The pressure of the gas into the Taylor bubble is homogeneous because of the small gas density and viscosity compared to the liquid ones. It means that pressure drop along the film is zero. Then the equilibrium equation for the film is

$$F_{Wf} - M_f + \rho_1^0 \alpha_{1f} g^x = 0. \quad (11.4)$$

Equations (11.2) - (11.4) make it possible to derive the equation for the slip velocity (compare to (8.2), (9.2)) for the regime when the interaction with liquid slug prevails over the interaction with the film and the film is thin, that takes place for the regimes far from flooding or from the transition to the annular flow:

$$v_2 - v_1 = \left[ \frac{(\rho_1^0 - \rho_2^0) g}{K_{Bs}^{(\gamma)}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \quad (K_{Bs}^{(\gamma)} = \frac{A^{(\gamma)} \rho_l^0}{2L} \left( \frac{\mu_l}{D \rho_l^0} \right)^{1-\gamma} \frac{(1-\bar{\delta})^{1+\gamma}}{\alpha_1^{1+\gamma} \alpha_2}) \quad (11.5)$$

It is necessary to keep in mind that even for long Taylor bubbles the near wall film may be not stabilized for an essential

part of the cell, i.e the thickness of the film  $\delta(z)$ , averaged velocity  $v_{1f}(z)$ , stresses  $\tau_{Bf}$  and  $\tau_{Wf}$  may be variable along the axis for a long part of the flow, and calculation of the forces  $M_{Bf}$  and  $F_{Wf}$  may need more detailed consideration with integration of variable stresses along the flow. It complicates essentially the theory for the regimes close to flooding.

### 12. ZUBER-FINDLAY DRIFT FLUX LAW

An analysis of the experiments for bubbly and slug upward vertical flows attracting the mass conservation equation and possible distributions of the void fraction and velocities of the phases in the cross section of the tube, allowed Zuber and Findlay [35] to propose the famous and remarkable correlation for bubbly and slug flow regimes called usually the Zuber-Findlay model:

$$v_2 = C_0 j + V_{2j} \quad (12.1)$$

where  $C_0$  and  $V_{2j}$  are the parameters, which must be determined from the experiments and which may be considered as constants for the experimental set. But in general they may be slightly different for different regimes and diapasons of  $\alpha_2$ , for different diameters of the tube, inlet and mixing devices and orientation of the flow relative gravitation and physical properties of the phases. In particular,  $C_0$  decreases smoothly with the increase of the flow velocities and pressure.

It is not difficult to express the slip velocity through the parameters of the Zuber-Findlay correlation

$$v_2 - v_1 = \frac{V_{2j}}{\alpha_1} + j \frac{C_0 - 1}{\alpha_1} \quad (12.2)$$

The most principal physical sense of this correlation is that for the **fixed void fraction**  $\alpha_2$  the slip or two-velocity effect **does depend on the total volume flux**  $j$ , if  $C_0 \neq 1$ , and this dependence is **linear**. It is a very remarkable and non-trivial result, and formula (12.2) may be called the **Zuber-Findlay law** for bubbly and slug flows in the tube.

What physical processes govern this phenomenon?

It is amazing that beginning from the foundational paper by Zuber and Findlay [35] during more than 30 years in dozens of papers and books the coefficient  $C_0$  was interpreted as a correlation coefficient  $C_0^*$  of cross sectional distribution of the total volume microflux  $j' \equiv \alpha_1' v_1' + \alpha_2' v_2'$  and void fraction  $\alpha_2'$ :

$$C_0^* \equiv \frac{\langle \alpha_2' j' \rangle}{\langle \alpha_2' \rangle \langle j' \rangle} \quad (\langle \varphi' \rangle \equiv \frac{1}{A} \int \varphi' dA) \quad (12.3)$$

On using simple **identities** this determination or **identity** for  $C_0^*$  is presented in the following form

$$v_2 \equiv C_0^* j + V_{2j}^* \quad (V_{2j}^* \equiv \langle \alpha_1' \alpha_2' (v_2' - v_1') \rangle / \alpha_2), \quad (12.4)$$

This **identity** looks like Zuber-Findlay equation (12.1) with the correspondences  $C_0 = C_0^*$  and  $V_{2j} = V_{2j}^*$ . But actually only if the specified slip velocity  $V_{2j}^*$  (determined by the averaging of  $(v_2' - v_1')$ , and connected with the two-velocity or slip velocity effect) does not depend on the total volume flux  $j$  one may write  $C_0 = C_0^*$  and  $V_{2j} =$

$V_{2j}^*$ . But for  $C_0 \neq 1$  the term  $V_{2j}^*$  together with  $v_2 - v_1$  **does depend on**  $j$  (as it was shown in (12.2), starting from the experimental Zuber-Findlay correlation itself). Even more, comparing (12.4) and (12.1) one may conclude that  $V_{2j}^*$  depends linearly on  $j$ :

$$V_{2j}^* = \Delta C_0 \cdot j + V_{2j}^*, \quad C_0 = C_0^* + \Delta C_0, \quad \Delta C_0 \neq 0. \quad (12.5)$$

where  $\Delta C_0$  is the constant coefficient. Only if the Zuber-Findlay experimental parameter  $C_0 = 1$ , when two-velocity or slip velocity effect does not depend on  $j$  (see (12.2)) it is possible (but not necessary at all) that  $C_0$  coincides with  $C_0^*$ , and  $V_{2j} = V_{2j}^*$ .

It is demonstrative that for the bubbly flow with peaks of bubble concentration near the tube wall (Nakoryakov et al. [36], Heringe & Davis [37], Sekoguchi et al. [38, 39], Serizawa et al. [40, 41]) estimations show that the correlation coefficient  $C_0^* < 1$ , though  $C_0 > 1$  is characteristic for these conditions.

**Zuber-Findlay correlation with the parameters  $C_0$  and  $V_{2j}$  are governed by force interactions.** The interpretation of  $C_0$  as the cross sectional correlation parameter  $C_0^*$  is incorrect.

### 13. INTERACTION COEFFICIENTS AND THE ZUBER-FINDLAY LAW EQUATION

Comparing Zuber-Findlay slip velocity equation (12.2) to theoretical slip velocity equations (9.2) and (11.5), we have that the influence of the total volume flux  $j$  on the slip velocity  $v_2 - v_1$  for fixed void fraction  $\alpha_2$  may be connected with two factors for

dispersed flow: 1) the external friction force on the wall  $F_{W2}$ , acting on the dispersed phase; 2) the bubble-liquid friction coefficient  $K_{12}^{(\gamma)}(a)$ ; and with one factor for the slug flow: Taylor bubble-liquid slug interaction coefficient  $K_{Bs}^{(\gamma)}(L)$ .

Firstly, the increase of  $j$  for fixed  $\alpha_2$  increases  $v_2 - v_1$  and decreases  $F_{W2}$  due to the decrease of fraction  $\alpha_{W2}$  of the bubbles near the tube wall because of the turbulence entrainment:  $F_{W2} = F^\circ - kj$

Secondly, the increase of  $j$  for fixed  $\alpha_2$  increases  $v_2 - v_1$  and decreases  $K_{12}^{(\gamma)}(a)$  due to the increase of  $a$  because of the inlet device influence on the forming of the bubble size.

For the vertical upward slug flow ( $F_{W2} = 0$ ) the second factor is actual only, namely, the increase of  $j$  for fixed  $\alpha_2$  increases  $v_2 - v_1$  due to the decrease of  $K_{Bs}^{(\gamma)}(L)$  because of the increase of Taylor bubble length  $L_2 \approx \alpha_2 L$ . It is possible as well due to the inlet device influence on the forming of the Taylor bubble length.

The effect of the wall interaction with the bubbles and slugs ( $F_{W2}$ ) must decrease with the increase of the tube diameter  $D$ . It follows by three reasons:

1.  $F_{W1}$  and  $F_{W2}$  related to the unit volume of the mixture are:  $F_{W1}, F_{W2} \sim D^{-1}$

2. The increase of  $D$  for fixed  $j$  or  $v_1$  must decrease  $\alpha_{2W}$  because of the decrease of the cross-sectional velocity gradient  $\partial v_1 / \partial r \sim v_1 / D$ , which initiates the lateral "lift" force by pushing the bubbles to the wall.

The increase of the tube diameter  $D$  for fixed flow velocity  $j$  or  $v_1$  increases  $Re_1$  that testifies to the increase of turbulence



intensity and spatial turbulence scale. This must intensify the processes of mixing that make the flow more uniform.

It was verified by the recent experiments of Johnson & White [42] with air-water flows in a tube with  $D = 200$  mm. In their experiment there was no peak concentration of the bubbles near the wall and at the same time their measurements gave  $C_0 = 1 \pm 0.02$ . Though  $C_0 = 1.1 \div 1.6$  in many experiments, mainly with smaller diameters.

It is important that  $C_0$  may depend on the mode of gas injection in the inlet of the tube [35].

The experiments would be more informative if together with the measurements of kinematic parameters  $j_1$ ,  $j_2$  and  $\alpha_2$  there were made the measurements of pressure gradient  $\partial p / \partial x$ , that allowing to determine external force  $F_{W1} + F_{W2}$  on the flow and to have additional information about the forces.

#### 14. ARMAND AND MIROPOLSKIY CORRELATIONS

Wonderfully as it is but in spite of the fact that N. Zuber is very popular among Russian specialists the Zuber-Findlay law was practically missed in Russia, where some other approximations were used.

The first experimental correlation for slip velocity in an air-water gas-liquid flow in the tube was that of Armand [43, 44]

$$\alpha_2 = 0.833 \beta_2 \quad (\beta_2 = j_2/j), \quad v_2 = C_0 j \quad (C_0 = 1.2; V_{2j} = 0). \quad (14.1)$$

It means that the Armand correlation corresponds to the Zuber-Findlay law without acting the Archimedes force along the flow ( $g^x = 0$ ,  $V_{2j} = 0$ ), for instance, for horizontal flow, when for  $j = 0$  we have  $v_2 = v_1$ . Comparing (14.1) to (9.1) for  $g^x \approx 0$ ,  $\gamma = 1$  one may to get

$$F_{W2} = 0.04 K_{12}^{(1)} \alpha_2 \alpha_1^{-2} j^2. \quad (14.2)$$

Thus, for the horizontal flow this dependence on total volume flux  $j$  is quadratic. Apparently it is explained that for horizontal flow an essential part of gas flows as a turbulent gas layer directly contacting the upper part of the tube wall (without laminar liquid microlayers) and initiating the friction force  $F_{W2}$ .

For vertical upward water steam flows ( $g^x = g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>) Miropolskiy et al. [45] proposed a more detailed correlation

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{W_0}{v}, \quad W_0 = \frac{13.5(1-p/p_{cr})}{Fr^{5/12} Re^{1/6}} \equiv 13.5 \frac{g^{5/12} D^{3/12} \mu^{1/6}}{(\rho_1^0)^{1/6}} \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)$$

$$\left( Fr = \frac{v^2}{gD}, \quad Re = \frac{\rho_1^0 v D}{\mu_1}, \quad v = \frac{\rho_1^0 \alpha_1 v_1 + \rho_2^0 \alpha_2 v_2}{\rho_1^0} \right), \quad (14.4)$$

where  $p_{cr} = 22.1$  MPa is the critical pressure for water. This correlation was obtained using the experimental data for  $v = 0.3 \div 3.0$  m/s,  $D = 5 \div 35$  mm. It shows explicitly the influence of the diameter of the tube, the density and viscosity of the liquid phase on slip velocity. The dependence, when  $\rho_2^0 \ll \rho_1^0$ ,  $v \approx \alpha_1 v_1$ , may be presented:

$$v_2 = \frac{W_0}{\alpha_1}, \quad v_2 - v_1 = \frac{W_0}{\alpha_1^2} - \frac{j}{\alpha_1} \quad (C_0 = 0, V_{2j} = \frac{W_0}{\alpha_1}) \quad (14.5)$$

that does not correspond to the Zuber-Findlay law because of the dependence of  $V_{2j}$  on the void fraction  $\alpha_2$ . Despite its including explicitly the gravity force acceleration  $g$ , the formula may correspond apparently to the earth condition ( $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>) only since for the absence of the gravity ( $g = 0$ ) it gives  $v_2 = W_0 = 0$ , and that is not supported with the physical sense for the forced up flow. Finally, as  $C_0$  for the Miropolskiy correlation is not close to unit, it is likely more

appropriate for the annular flow ( $\alpha_2 > 0.8$ ), and there is no sense to use it in interpreting by slip velocity equations (9.2) or (11.8).

#### 15. NON-STEADY FLOWS. KINEMATIC WAVES

The Zuber-Findley equation allows to generalize the Wallis drift flux theory (Wallis [34], Nigmatulin [10]) for non-steady flows with kinematic waves, taking into account the wall friction effects. In this case the wall friction is manifested by the coefficient  $C_0$  only, because the equation is transformed to:

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t'} + c(\alpha_2) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x'} = 0, \quad (15.1)$$

$$x' = x - C_0 \int_0^t j(\tau) d\tau, \quad t' = t, \quad c(\alpha_2) = \frac{d}{d\alpha_2} (\alpha_2 V_{2j}),$$

that coincides with the corresponding equation for the drift flux theory with no wall friction ( $C_0 = 1$ ) and is not principal to get a solution.

The analysis of the drift flux theory presented in this paper was initiated with the unpublished paper by Lahey [46].

#### 16. LOCAL DEFORMATIONAL INERTIA

A very unusual property - **local deformation inertia** appears during quick intensive compression or expansion of bubbly liquid. It is connected with inertia of expansion or compression of gas (vapor) bubbles because of radially attached small-scale liquid mass around the bubbles. The radial motion around the bubble is described by radial velocities of the carrier liquid  $w_1$  and bubble gas  $w_2$  on the bubble interface which is supposed to be spherical. The values of  $w_1$  and  $w_2$  differ from each other and from  $d_2 a / dt$  because of phase transitions only and satisfy the equation of mass conservation on the interface:

$$\rho_1^0 (w_1 - \frac{d_2 a}{dt}) = \rho_2^0 (w_2 - \frac{d_2 a}{dt}) = -\xi_{12}, \quad (16.1)$$

where  $\xi_{12}$  is the evaporation or condensation intensity.

The variation of  $w_1$  is described with the equation which generalizes the Rayleigh-Lamb-Plesset one (see (4.1)):

$$(1 - \varphi_*^{(1)}) a \frac{dw_1}{dt} = \frac{p_2 - p - 2 \Sigma / a}{\rho_1^0} - \frac{4 \mu_1 w_1}{a \rho_1^0} - (1 - \varphi_*^{(2)}) \frac{3 w_1^2}{2}, \quad (16.2)$$

where  $p \approx p_1$  is the average pressure in the carrier liquid or mixture,  $p_2$  is the gas pressure in the bubbles.

The coefficients  $\varphi_*^{(1)}$  and  $\varphi_*^{(2)}$  (Nigmatulin [8, 9, 10]) take into account non-singularity of the bubbles (see (5.3) and (5.4)):

$$\begin{aligned} \varphi_*^{(1)} &\approx 1.1 \alpha_2^{1/2}, & \varphi_*^{(2)} &\approx 1.5 \alpha_2^{1/2} & \text{- for regular distribution} \\ \varphi_*^{(1)} &\approx 3.6 \alpha_2, & \varphi_*^{(2)} &\approx 12 \alpha_2 & \text{- for chaotic distribution.} \end{aligned} \quad (16.3)$$

Negative values of  $\varphi_*^{(1)}$  and  $\varphi_*^{(2)}$  are possible for the structure with grouping of few bubbles into clusters.

By introducing the Raileigh-Lamb-Plesset equation into the continua equation of bubbly liquid the corresponding two-fluid model becomes the two-pressure one. For the first time this equation was introduced in the averaged or continua description of the bubbly liquid by Iordansky [19] and Kogarko [49] in 1960. An essential contribution in two-pressure modeling was made by Wijngaarden [50]. Then this model was used to investigate wave propagation (Batchelor [51],

Wijngaarden [50], Nakoryakov et al. [52, 53], Nigmatulin et al. [10, 54, 55], Beyligh, Gulhan [56]).

For the perfect gas with adiabatic exponent  $\gamma_2$  the equation for gas pressure in the spherical bubbles has the form

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{3(\gamma_2 - 1)}{a} \mathfrak{G}_{12} - \frac{3\gamma_2 p_2 w_2}{a}. \quad (16.4)$$

Here  $\mathfrak{G}_{12}$  determines heat inflow into gas referring to the unit of bubble interface. The processes of interphase heat ( $\mathfrak{G}_{12}$ ) and mass exchange ( $\xi_{12}$ ) should be determined by special closure equations (Nigmatulin [8, 10]).

Usually, for bubbly liquid it is possible to use the one-velocity approximation with the non-compressible carrier liquid neglecting by mass fraction of the gas:

$$v_1 \approx v_2 \approx v, \quad \rho_1^\circ = \text{const}, \quad \rho \approx \rho_1^\circ (1 - \alpha_2). \quad (16.5)$$

As follows from the the mass conservation equations

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \nabla^k v^k = \frac{3\alpha_2}{a} w_1, \quad (16.6)$$

On differentiating this equation by time and using (16.2), (16.1) one gets the "first wonderful" equation for bubbly liquid - differential by time equation that links pressure and density:

$$\alpha_2(1 - \varphi_*^{(1)}) a^2 \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{(\psi(\alpha_2) - 6\alpha_2) a^2}{6\rho_1^\circ} \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu_1 \alpha_2}{\rho_1^\circ} \frac{dp}{dt} = 3\alpha_1 \alpha_2^2 [p - (p_2 - 2\Sigma/a)]. \quad (16.7)$$

$$\left(\psi(\alpha_2) = 1 - 4\varphi_*^{(1)} + 3\varphi_*^{(2)} - 6\alpha_2\right),$$

where the parameters  $\alpha_2, p_2, a$  serve as kinetic ones, for which one has the "kinetic" equations following from (16.4), (16.5), (16.1):

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{\gamma_2 p_2}{\alpha_2 \rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{3\gamma_2 p_2 \xi_{12}}{\alpha_2} \left(\frac{1}{\rho_2^\circ} - \frac{1}{\rho_1^\circ}\right) + \frac{3(\gamma_2 - 1)}{a} \mathfrak{G}_{12},$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{1 - \alpha_2}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{3\alpha_2}{a\rho_1^\circ} \xi_{12}, \quad \frac{a^3}{\alpha_0^3} = \frac{\alpha_2(1 - \alpha_{20})}{\alpha_{20}(1 - \alpha_2)}. \quad (16.8)$$

The obtained "first wonderful equation" (16.7) is the non-holonomic equation of state of bubbly liquid where medium pressure is balanced with gas pressure (elasticity), with the first (viscosity) and second (inertia) derivatives by time of density. For the first time this property of bubbly liquid was marked by Kogarko [46] in 1961. The dependence of density on the second derivative reflects **local volume deformational inertia**. Due to this property the shock waves may have an oscillatory structure and the effects of strengthening may appear when the pressure in one-dimensional plane wave may be essentially higher in comparison with maximum pressure in the initial pulse.

Taking a divergence of the momentum conservation equation of the mixture and differentiating by time the equation (16.6) (see Nigmatulin [10, 55, 57]) one get the "second wonderful differential equation" for the averaged pressure  $p$  distribution in bubbly liquid as the elliptic Poisson equation:

$$\nabla^k \nabla^k p = - \left( \frac{3\alpha_1 \alpha_2}{(1 - \varphi_*^{(1)}) a^2} \right) (p - p_2^*) \quad (16.9)$$

$$(p_2^* = p_2 - \frac{2\Sigma}{a} - \frac{4\mu_1 w_1}{a} - \psi(\alpha_2) \cdot \frac{\rho_1^\circ w_1^\circ}{2})$$

where  $\nabla^k \nabla^k$  denotes the Laplace operator. In accordance with this equation the pressure field is determined uniquely at any moment of time  $t$  through the known fields of  $\alpha_2, a, w_1, p_2$ . This model presents an interesting case when the elliptic equation describes a wave phenomenon due to differential equations for the parameters ( $\alpha_2, a, w_1, p_2$ ) in the right side of the Poisson equation.

For a potential flow of the fluid equation (3.2) is reduced to the second Poisson equation for bubbly liquid:

$$\nabla^k \nabla^k \Phi = 3\alpha_2 w_1 / a \quad (v^k = \nabla^k \Phi). \quad (16.10)$$

This equation generalizes the corresponding Laplace equation for a potential flow of non-compressible fluid ( $\alpha_2 = 0$ ).

## 17. WAVE PROPAGATION

Wave propagation in two-phase fluids is accompanied by a great variety of inter- and intraphase hydromechanical and thermophysical processes. Among them are the following:

- inertia of the phases, in particular, not only the phase flow inertia but local deformation inertia of compressibility or expansion for the bubbly fluid;
  - compressibility of the dispersed and carrier phase substances;
  - interface force, or momentum interaction, in particular interface friction because of the viscosity of the phases;
  - interfacial heat exchange;
  - phase transitions (evaporation and condensation);
  - diffusion of the vapor and non-condensable components;
  - deformation and fragmentation of the drops or bubbles ;
- These processes are initiated with the wave and, in their turn, influence the wave propagation strongly.

Specific features of the waves are the following.

1. Relaxation non-equilibrium processes mentioned above need some relaxation time  $t_R$  and space (relaxation zone) to transfer one equilibrium state before the wave to another equilibrium state after the wave. That is why the thickness of the wave or its relaxation zone  $L_R$  may be large. For instance, a shock wave in a bubbly liquid with the bubble diameter about 1mm may have the relaxation zone with the thickness  $L_R \sim 1m$ . The time  $t_{st}$  and distances  $L_{st}$  need the wave to become steady many times larger than  $t_R$  and  $L_R$  correspondingly. In this case the wave after the initiation may be unsteady during long time and for long distances.

2. For the gas-drop and gas-particle flows the most principle relaxation process is the non-steady friction due to relative motion of the "gas wind" near dispersed particles. For high frequency the Basset force and added mass force may influence the attenuation of the wave.

For the bubbly liquid the most principle is radial micromotion of the liquid near the bubbles with the inertial radial added mass around the bubbles and "elasticity" of the gas into the bubble. The inertia and elasticity lead to oscillation shock waves.

3. Attenuation of the wave is governed by non-linear dispersion and by dissipation because of the viscous frictions between the carrier and dispersed phases and thermal dissipation

which is strongly dependent on phase transition possibility. In gas-drop or gas-particle mixtures the dissipation is governed mainly by viscous friction between the phases. For bubbly fluids the thermal dissipation determined by thermal properties of the phases is dominant. For "cold" bubbly fluids with neutral gas without evaporation or condensation the dissipation is determined by the thermal properties of the gas. In particular, changing gas into bubbles one may effectively influence the attenuation of the wave on the contrary changing the viscosity of the carrier phase, which form is predominant as mass and volume content of the mixture (see Fig. 17.1). For liquid with vapor the bubbles thermal dissipation is determined by thermal conductivity and diffusivity of the liquid determining the capacity of the liquid to supply the evaporation heat from the bubble. The tendency to oscillation is more explicit for the liquid with neutral gas.

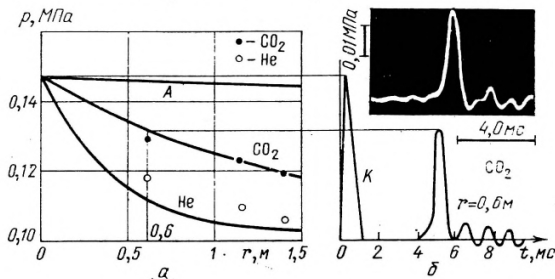


Fig. 17.1. Attenuation of the triangular impulse in a water with bubbles: (a) alteration of the pressure maximum value on depth; (b) theoretical and experimental oscillograms of pressure.

4. Bubbly liquid may manifest not only the attenuation but even **amplification** of the shock wave after its initiation. This property is connected with reflection of the shock wave from the bubbly layer and then from the solid wall (acoustic reflection amplification) and by the property of bubbly liquid to compress itself locally by inertia (see Fig. 17.2).

5. For gas-drop mixtures with relatively small drop dimension and with two-component carrier gas (non-condensable gas and vapor) an anomalous non-monotoneous effect of the mass drop content  $m \equiv \rho_2 \alpha_2 / (\rho_1 \alpha_1)$  is possible on the attenuation of a harmonic forced oscillation wave (compare with free oscillation wave (4.3)) (see Fig. 17.3)

$$A(\omega) \cdot e^{\delta(k) \cdot x} \cdot \sin\{2\pi[x - C(\omega)t]/L + \varphi\}. \quad (17.1)$$

The attenuation is determined by non-dimensional decrement  $\sigma = \delta L$ .

6. Breaking down of drops and bubbles has a strong influence on wave propagation. It intensifies the interface force, heat and mass transfer interactions. Sometimes, it may appear as "vapor explosion" (see Fig.6.4).

### 18. SUPERHIGH COMPRESSION-INDUCED TEMPERATURES IN GAS BUBBLES

The forced oscillation of the liquid pressure in a bubbly mixture causes bubble volume and gas pressure oscillations to take place. During gas bubble volume oscillations very high gas compression and temperatures may occur. In fact, the bubble gas temperature may be high enough to cause visible light radiation called **sonoluminescence** [58-61].

The temperature levels which have been achieved in harmonically-forced sonoluminescence experiments are around 5000 K, nevertheless, it appears that much higher temperatures are possible as well. Indeed, it appears possible to use this phenomenon to obtain fusion in deuterium bubbles. However, for

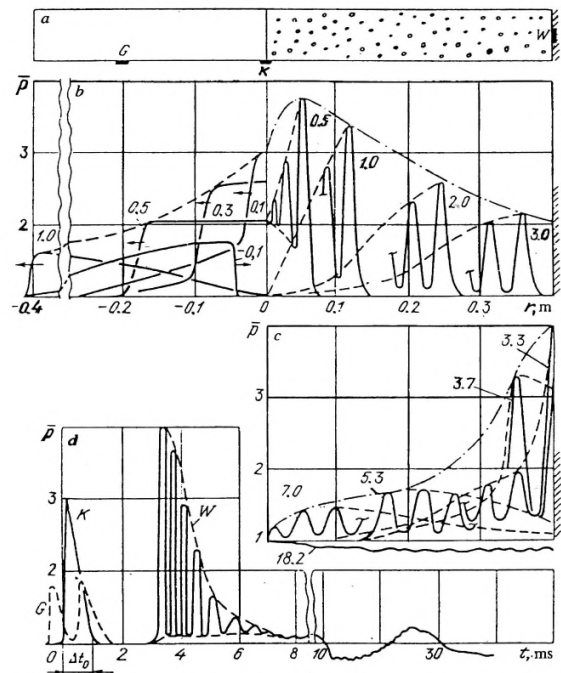


Fig 17.2. The predicted evolution of the wave impulse arriving (b) from air ( $r < 0$ ,  $p_0 = 0.1$  MPa,  $T_0 = 293$  K) into a layer of water with bubbles of air or nitrogen ( $0 < r < 0.4$  m,  $p_0 = 0.1$  MPa,  $T_0 = 293$  K,  $a_0 = 1$  mm,  $\alpha_{20} = 0.02$ ) at time  $t = 0$ , and then reflected (c) from a rigid wall ( $r = 0.4$  m) at time  $t \approx 3.3$  microseconds. The process is shown in the form of pressure-diagrams  $p(r)$  (b and c) at predetermined points in time  $t$  ( $\mu$ s) indicated by labels, and also in the form of pressure "oscillograms"  $p(t)$  on three "sensors" G, K, and W (shown in Fig. 6.7.14a, namely: in air ("sensor" G at  $r = -0.2$  m); on the contact boundary ("sensor" K at  $r = 0$ ), and on the rigid wall ("sensor" W at  $r = 0.4$  m).

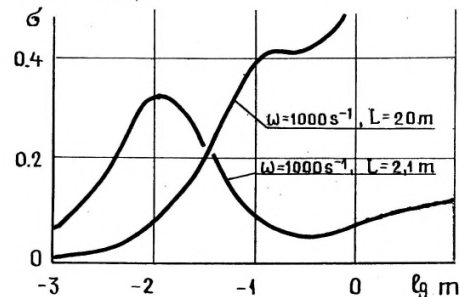


Fig. 17.3. Attenuation decrement in gas-drop mixture for different frequencies and wave-lengths.

this to be feasible it is necessary to achieve very high compression-induced temperatures (i.e.  $\sim 10^7$  K). But even without fusion the high temperature bubbles in the liquid may be very perspective for chemical technology.

A new method of excitation of the kinetic energy of the liquid surrounding the bubble was proposed (Nigmatulin, Shagapov, Vakhitov & Lahey [62]) so that superhigh inertial compression of gas bubbles takes place (see Fig. 18.1). For maximum intensity of mechanical energy pumping into the gas bubble/liquid system it is necessary to make pressure  $p_e$  maximum during the compression stage and minimum during the expansion stage. Apparently, this coordination needs using feedback and looks analogous to the method a basketball player uses for gradual increasing the ball's rebounds off the floor during the dribbling, and that is why the regime was called a

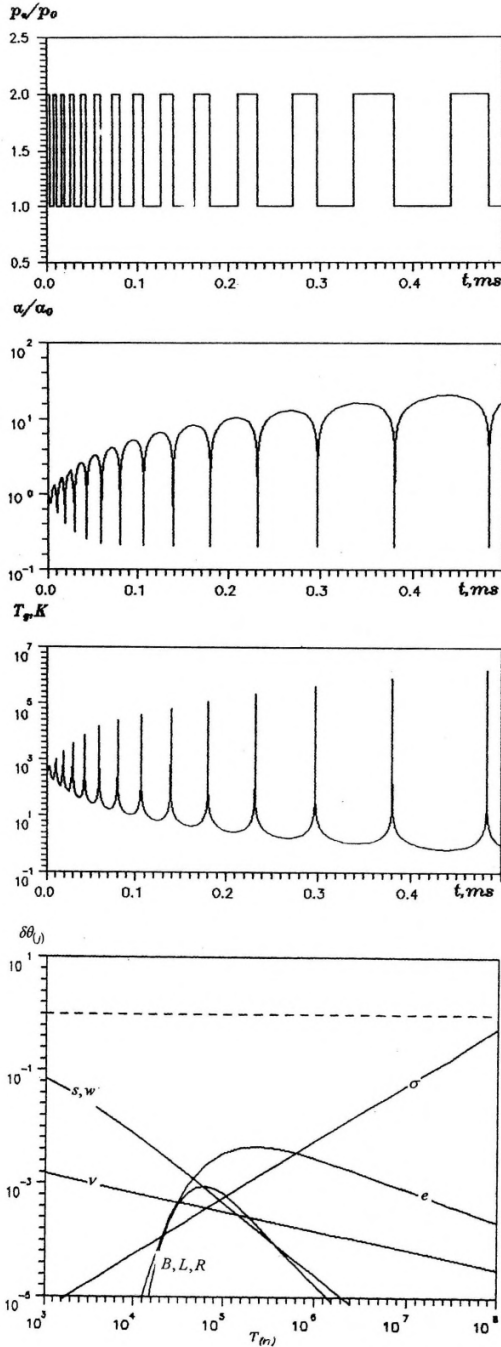


Fig. 18.1.

"basketball dribbling regime" (BDR).

This mode of non-linear non-periodic resonance excitation should allow to reach very high gas bubble compressions and temperature peaks using modest pressure amplitudes  $\sim 0.1 \div 1$  MPa and frequencies  $\sim 10^2 \div 10^3$  Hz (see Fig. 18.1)

The limitation of maximum temperature and pressure is connected with dissipation (viscous dissipation mechanisms, conductive and radiation heat losses), with compressibility of the liquid, with shock wave effects in the liquid and in the gas, with instability of the bubble interface (breaking down of the bubble), with evaporation of the liquid at the bubble interface (under subcritical conditions in the liquid), with mutual diffusion of the

gas and the liquid, with ionization not only of the gas atoms but liquid atoms too.

Our joint group from RPI (Lahey et al.) and from TIMMS (Nigmatulin et al.) has estimated BDR viscous dissipation mechanisms, conductive and radiation heat losses for BDR. It is shown that for some real conditions in spite of these losses it is possible to achieve very high temperatures. For deuterium or tritium bubbles possible neutron production is estimated during extremely short supercompression.

It is proved that supercompression may be limited by **breaking down of the bubble interface, compressibility of the liquid and mutual diffusion of the gas and the liquid.**

19. MULTICOMPONENT GAS-LIQUID FLOWS IN TUBULAR REACTORS OR FURNACES

A combined motion of gas and liquid in channels is widely used in chemical technology, petroleum refinery and other related industries. In particular, many technological processes are associated with intensive heating of large masses of multicomponent liquid accompanied by phase transitions and chemical reactions.

Tube furnaces with  $D \approx 0.1$  m are often used in these processes; these tubes convey gas-liquid multicomponent flows with heat input. The level of heat fluxes reaches  $50 \text{ kW/m}^2$ .

When  $\alpha_g > 0.8$  and velocities  $v > 15 \text{ m/s}$  ( $(\rho_g v^2 / (\rho_l g D)) \gg 1$ ), the flow close to axisymmetry dispersed-film regimes of flows are realized even in horizontal tubes.

It should be remembered that large pressure drops take

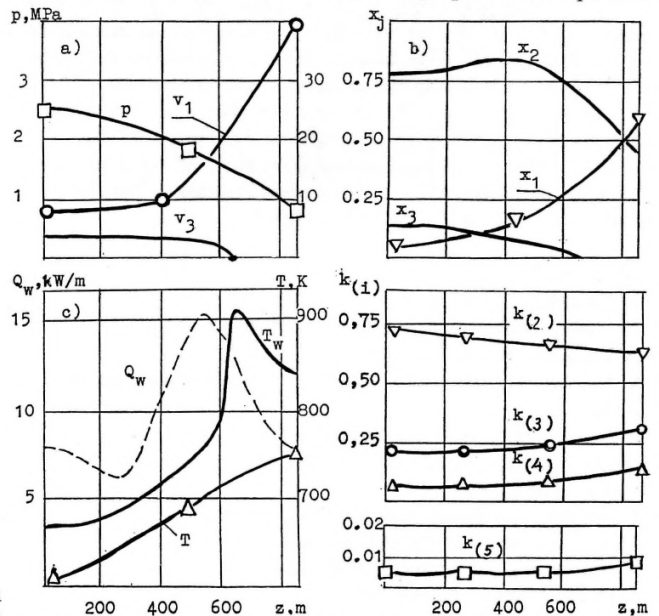


Fig 19.1. The distributions (calculation and experiment) of the pressure  $p$ , averaged velocities of the gas-droplets core ( $v_1 = v_2$ ) and the liquid wall film ( $v_3$ ), mass flow rate fractions  $x_j = m_j / m$  for gas ( $x_1$ ), drops ( $x_2$ ), film ( $x_3$ ) and liquid components mass flow rate fractions  $k_{(j)} = (m_{2(j)} + m_{3(j)}) / (m_2 + m_3)$  (oil ( $k_{(2)}$ ), resin ( $k_{(3)}$ ), asphaltene ( $k_{(4)}$ ), carboid ( $k_{(5)}$ )), flow temperature  $T$  and steel wall temperature  $T_w$ , measured and used for calculation heat flux  $Q_w$  (dashed line) along the petroleum coke production tube.



place in intensive processes, and the process of a chemical reaction depends not only on heating but also on purely hydrodynamic effects defining, in particular, pressure variation and interrelated with it, intensity of vaporization or condensation. But vaporization and condensation influence velocities, which in their turn influence a pressure drop. These are the particular situations being specific for a number of modern intensive and energy-consuming processes whose analysis and design require a combined or connected solution of a complete system of equations of mass, momentum, energy, and kinetics of both interphase and intraphase processes.

One of the most important is high-quality experimental and theoretical information for the interphase interactions, especially on **drop entrainment and deposition of the near wall film**.

Figure 19.1 illustrates the results of a numerical and experimental investigation of the two-phase multicomponent flow in tube ( $D = 0.1$  m,  $L \approx 1000$  m) furnace for petroleum coke production. The investigation was initiated with the problem of plugging the tube by coke ("coke sclerosis") for the last 100 m of the channel. This plugging forced to stop the process for the very hard operation of burning out of the coke plug by oxygen blowing. Our investigation showed that the plugging zone is that of dry-out heat exchange crisis because of the near the wall film disappeared.

By means of the numerical experiment, the optimum values of the parameters  $D$ ,  $L$ , initial pressure  $p$ , mass flow rate  $m$ , initial gas flow rate fraction  $x$ , heat power distribution  $Q$  along the channel may be estimated. Some new ideas for preventing from the dry-out crisis are proposed.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The author is grateful for Dr. R. Lahey, Jr., from Rensselaer Polytechnic Institute for his very useful cooperation and discussions which gave the idea to make the analysis for some problems during the author's visiting scholarship at Rensselaer Polytechnic Institute.

The author thanks Dr. D. Lhuillier (Pierre et Marie Curie University) for joint work on some problems of this paper.

The author wishes to acknowledge the financial support given to this study by Rensselaer's Strategy Initiatives Program and the National Research Council (NRC, CAST Grant B10118).

#### REFERENCES

1. Kh. Rakhmatulin, *PMM*, **20**, No. 2, (1956).
2. Kh. Rakhmatulin, N. Mamadaliev, *PMTF*, No. 4, (1969).
3. A. Kraiko, L. Sternin, *PMM*, **29**, No. 3, (1965)
4. V. Nikolaevskiy, *Mechanics of Porous Saturated Media*, Moscow, Nedra, 1970.
5. R. Nigmatulin, *Fluid Dynamics (MZhG)*, No. 5, (1967).
6. M. Ishii, *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two Phase Flow*, Eyrolles, Paris, 1975.
7. J. Delhaye, *Two-Phase Flows and Heat Transfer*, Vol. 1, Ed. S. Kakac and S. Veziroglu, Hemisphere, 1976, 101.
8. R. Nigmatulin, *Fundamentals of Mechanics Heterogeneous Mixtures*, Moscow, Nauka, 1978
9. R. Nigmatulin, *IJMF*, **5**, No. 5, (1979), 353.
10. R. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media*, Vol. 1, 2; Hemisphere, 1990.
11. G. Arnold, D. Drew & R. Lahey, *Chem. Eng. Comm.*, **86**, (1989).
12. G. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, 1970.
13. L. Sedov, *Continua Mechanics*, Vol. 2., Moscow, Nauka, 1984.
14. O. Voinov, *PMTF*, No. 4, (1973).
15. R. Garipov, *PMTF*, No. 4, (1972).
16. O. Voinov & A.G. Petrov, *PMM*, **39**, No. 5, (1973).
17. O. Voinov & A.G. Petrov, *PMM*, **41**, No. 2, (1975).
18. A. Biesheuvel, & L. van Wijngaarden, *J. Fluid Mech.*, **148**, (1984), 301.
19. S. Iordanskiy, *PMTF*, No. 3, (1960).
20. G. Wallis, *Int. J. Multiphase Flow*, **17**, No. 3, (1991).
21. J. Happel & H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Prentice-Hall, 1965.
22. S. Banerjee & W. Hancox, *IJMF*, **4**, (1978), 437.
23. A. Biesheuvel, & L. van Wijngaarden, *J. Fluid Mech.*
24. A. Jones, A. Prosperetti, *IJMF*, **11**, No.2, (1978), 133.
25. L. Klebanov, A. Kroshilin, R. Nigmatulin, B. Nigmatulin, *PMM*, **46**, No. 1, (1982)
26. G. Batchelor, *J. Fluid Mech.*, **52**, No. 2, (1972), 245.
27. A. Golovin & V. Tchijov, *PMM*, **42**, No. 1, (1978), 105.
28. N. Zuber, *Chem. Eng. Sci.*, **19**, (1964), 897.
29. L. van Wijngaarden, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **4**, (1972), 369.
- 29a. D. Drew, & R. Lahey, Jr., *IJMF*, **13**, (1987), 113.
30. D. Drew, & G. Wallis, (to be published) (1994).
31. R. Nigmatulin, R. Lahey, Jr., D. Drew, (to be published) (1995)
32. M. Goldshtik, *PMTF*, No. 6, (1972), 106.
33. A. Alajbegovic, PhD Thesis, RPI (1994).
34. G. Wallis, *One-Dimensional Two-Phase Flows*, McGraw-Hill, 1969.
35. N. Zuber, J. Findlay, *J. Heat Transfer*, **87**, (1965), 453.
36. V. Nakoryakov et al., *Investigation of Turbulent Two-Phase Flows*, Ed. S. Kutateladze. Novosibirsk, ITF (1973).
37. R. Heringe, M. Davis, *J. Fluid Mech.*, **73**, (1976), 97.
38. K. Sekoguchi et al., *Two Phase Flow Dynamics*, Ed. A. Bergles & S. Ishigat, Hemisphere, London (1981), 59.
39. T. Sekoguchiet et al., *Int. Conf. on Multiphase Flows*, Tsukuba, (1991), 357.
40. A. Serizawa et al., *IJMF*, **2**, (1975), 235.
41. A. Serizawa, I. Kataoka, *Transient Phenomena in Multiphase Flow*, Ed. by N. Afgan, Hemisphere, (1988), 179.
42. A. Johnson, D. White, *IJMF*, **19**, No. 6, (1993), 921.
43. A. Armand, *Izv. Vses. Teplotech. Inst.*, No. 1, (1946). English transl. see *AERE-Trans.*, **828**, 1959.
44. A. Armand, *Izv. Vses. Teplotech. Inst.*, No. 2, (1950).
45. Z. Miropolskiy et al., *Teploenergetika*, No. 5, (1971), 60.
46. R. Lahey, Jr., Personal communications (1993).
47. R. Lahey, Jr., & D. Drew, *Chem. Eng. Comm.*, **118**, (1992).
48. C. Pauchon, & S. Banerjee, *IJMF*, **14**, No. 3, (1988), 253.
49. B. Kogarko, *DAN SSSR*, **137**, No.6, (1961).
50. L. van Wijngaarden, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **4**, (1972), 68.
51. G. Batchelor, *Fluid Mech. Trans.*, (Warszawa), **4**, (1967).
52. V. Nakoryakov et al., *MZhG*, No. 5, (1972).
53. V. Nakoryakov, B. Pokusaev, I. Shreyber, *Wave Propagation in Gas-Liquid Media*, CRC Press, (1993).
54. R. Nigmatulin, V. Shagapov, *MZhG*, No. 6, (1974).
55. A. Gubaidullin & R. Nigmatulin, *DAN SSSR*, **226**, No.6, (1976)
56. A. Beyligh, A. Gulhan, *Phys. Fluids*, **A2**, No. 8, (1990).
57. R. Nigmatulin, *Bubble Dynamics and Interface Phenomena*, Ed. J. Blake et al., Kluwer Acad. Publ., (1994), 121.
58. K. Suslik, *Scientific American*, **2**, 80, (1989).
60. L. Crum, S. Cordry, *Bubble Dynamics and Interface Phenomena*, Ed. J. Blake et al., Kluwer Acad. Publ. (1994).
61. R. Hiller et al., *Science*, **266**, (1994), 248.
62. R. Nigmatulin, V. Shagapov, N. Vakhitov, R. Lahey, *DAN* (1995).

# DRIFT FLUX MODEL AS APPROXIMATION OF TWO FLUID MODEL FOR TWO PHASE DISPERSED AND SLUG FLOW IN TUBE

R.I. NIGMATULIN

*Tyumen Institute of Mechanics of Multiphase Systems (TIMMS)  
Ufa-Bashkortostan Branch of Russian Academy of Sciences<sup>1</sup>*

The analysis of one-dimensional schematizing for non-steady two-phase dispersed and slug flow in tube is presented. Quasi-static approximation, when inertia forces because of the accelerations of the phases may be neglected, is considered.

Gas-liquid bubbly and slug vertical upward flows are analyzed. Non-trivial theoretical equations for slip velocity for these flows are derived.

Juxtaposition of the derived equations for slip velocity with the famous Zuber-Findlay correlation is presented. The widespread interpretation of the coefficients of the Zuber-Findlay correlation as cross correlation coefficients is criticized.

The generalization of non-steady drift flux Wallis theory taking into account influence of wall friction on the bubbly or slug flows for kinematical waves is considered.

## 1. Main assumptions

Let consider two phase flow of non-compressible phases<sup>2</sup>, i.e. with fixed true densities  $\rho_1^0$  and  $\rho_2^0$  of the phases:

$$\rho_1^0 = \text{const}, \rho_2^0 = \text{const} \quad (1.1)$$

in a pipe with a constant cross section<sup>3</sup>

$$A = \text{const}. \quad (1.2)$$

In particular for circular tube with diameter  $D$

$$A = \frac{1}{4} \pi D^2. \quad (1.3)$$

It will be used averaged volume (cross sectional) concentrations of phases  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ :

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \alpha_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (A_1 + A_2 = A). \quad (1.4)$$

where  $A_i$  is a cross section occupied by  $i$ -th phase ( $i = 1,2$ ) in the section  $A$ . The parameters corresponding to  $i$ -th phase will be marked as in (1.1) by subscripts  $i = 1,2$ .

Then it will be used averaged volumetric flux densities or superficial velocities of the phases  $j_i$  and of the mixture  $j$  (total volume flow rate density):

<sup>1</sup> The paper was written during the author's visting scholarship at Rensselaer Polytechnic Institute

<sup>2</sup> Generalization for compressible phases is possible.

<sup>3</sup> Generalization for smoothly variable crosssection of the tube channel is possible

$$j_i = \frac{1}{A} \int_{A_i} v_i' ds \quad (i = 1, 2), \quad j = j_1 + j_2, \quad (1.5)$$

where  $v_i'$  is a longitudinal microvelocity of the  $i$ -th phase, fluctuating because of the relative motion of the phases and because of the turbulence.

The averaged velocities of the phases may be introduced by ratios:

$$v_i \equiv \frac{j_i}{\alpha_i}, \quad j \equiv \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2. \quad (1.6)$$

It is necessary to take into account that one dimensional approximation or schematizing will be used and all averaged variables, in particular  $\alpha_i$ ,  $v_i$ ,  $j_i$  ( $i = 1, 2$ ), will be considered as smoothly variable on time  $t$  and longitudinal coordinate  $x$ .

Then the dispersed flow will be considered. The carrier phase will be marked as the first phase ( $i = 1$ ), the dispersed phase will be marked as the second phase ( $i = 2$ ).

### 2. Mass conservation equations

Mass balance equations for the phases without phase transition<sup>4</sup>, taking into account non-compressibility of the phases, may be written by the following:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Summarizing these two equations we will have total volume flow rate integral of non-compressibility

$$\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0, \quad \text{or} \quad j \equiv \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = j(t). \quad (2.2)$$

### 3. Momentum conservation equations

Two-fluid or two-velocity model for momentum conservation equations in one-dimensional approximation for dispersed flow without direct (not through the carrier phase) interaction (direct contacts, collisions, electromagnetic interaction, momentum transfer by random motion of the dispersed particles) between the dispersed particles (Nigmatulin [1], Lahey [2], Lahey & Moody [3]) may be presented as following:

$$\rho_1^{\circ} \alpha_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = \frac{\partial \sigma_{1*}}{\partial x} - M_{12} - F_{W1} + \rho_1^{\circ} \alpha_1 g^x \quad (M_{12} = n f_{12}), \quad (3.1)$$

$$\rho_2^{\circ} \alpha_2 \frac{d_2 v_2}{dt} = M_{12} - F_{W2} + \rho_2^{\circ} \alpha_2 g^x, \quad \left( \frac{d_i}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad i = 1, 2 \right).$$

<sup>4</sup> Generalization for phase transition is possible.

On the left sides there are inertia forces due to acceleration (as temporal and as spatial (convective)) of the phases in the tube. On the right sides there are forces due to gradient of stresses  $\sigma_{1*}$  (including pressures  $p$ , shear stresses  $\tau$  and Reynolds stresses  $\tau_{Re}$  and practically coinciding with two-phase mixture stress), external interactions between the phases with the tube wall ( $F_{W1}$  and  $F_{W2}$ ), external body forces, in particular, gravitational forces with the intensity  $g^x$  in the  $x$ -direction, and finally interface force  $M_{12}$ . The force  $M_{12}$  includes only some part of the full interface force, that is the sum of the forces from the dispersed particles (drops) which are fully in the macroscopic volume. The interface force  $M_{12}$  is determined by averaged force  $f_{12}$  from the carrier phase per one dispersed particle, multiplied on number of the dispersed particles  $n$  per unit volume. The other part of the interface force from the intersected particles by the boundary of the macroscopic volume is included in the stress  $\sigma_{1*}$  (see Nigmatulin [1], Nigmatulin et al [4]. All components of the equation (including  $F_{W1}$  and  $F_{W2}$ ) are related for a unit volume of the two phase flow.

In the hydromechanics of turbulent flows stress  $\sigma_{1*}$  is usually determined only by pressure, and influence of the viscosity and turbulence manifests in the friction forces on the tube wall and on the interface. That is why it will be assumed

$$\sigma_{1*} = -p. \quad (3.2)$$

For dispersed flow there is a sense to detach the Archimedes force  $nf_A$  from the interface force, which is included in the first components in the right sides of the equations, and  $F_{12}$  may be expressed (Nigmatulin [1], Batchelor [5], Sedov [6]) as

$$M_{12} = M_A + M_*, \quad f_{12} = f_A + f_*,$$

$$M_A \equiv nf_A = \rho_1^\circ \alpha_2 \left( \frac{d_1 v_1}{dt} - g^x \right), \quad M_* \equiv nf_*, \quad (3.3)$$

where  $n$  is number density of the dispersed particles (or drops or bubbles),  $f_*$  is an averaged force from the carrier phase per one dispersed particle due to viscosity (drag force) and added mass. Substituting (3.3) into the first equation of (3.1) we will have

$$\rho_1^\circ \frac{d_1 v_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - M_* - F_{W1} + \rho_1^\circ g^x. \quad (3.4)$$

Then the Archimedes force may be rewritten in the form

$$nf_A = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_2 M_* - \alpha_2 F_{W1}. \quad (3.5)$$



Taking into account (3.2) and (3.3) we will have the momentum equations (3.1) in the following form

$$\rho_1^\circ \alpha_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \alpha_1 M_* - \alpha_1 F_{W1} + \rho_1^\circ \alpha_1 g^x, \quad (3.6)$$

$$\rho_2^\circ \alpha_2 \frac{d_2 v_2}{dt} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_1 M_* - \alpha_2 F_{W1} - F_{W2} + \rho_2^\circ \alpha_2 g^x.$$

Note, that in this form due to detaching Archimedes force from the interface force, expressing it through the gradient of pressure by formula (3.5), in the momentum equation for the second (dispersed) phase there is some part of the external force, acting on the first phase from the wall ( $\alpha_2 F_{W1}$ ).

#### 4. Inertia free flow

The main assumption of the drift flux approximation (Wallis [7], Nigmatulin [1], ) is a neglect by inertia forces as due to temporal accelerations ( $\rho_i^\circ \alpha_i (\partial v_i / \partial t)$ ) and as to spatial accelerations ( $\rho_i^\circ \alpha_i v_i (\partial v_i / \partial x)$ ) compared with the other forces at the right sides of the equations (3.6). It means also that in the interface force  $f_*$  inertial added mass force component is small, and it is determined only by a drag component. The same is for the forces on the tube wall ( $F_{W1}$  and  $F_{W2}$ ), which may be determined by quasi-static approximation.

Estimating the inertial forces due to acceleration and comparing them with the pressure drop forces we may write the necessary conditions for non inertia flow:

$$\rho_i^\circ \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \sim \frac{\rho_i^\circ \alpha_{i0} \Delta v_0}{t_0} \ll \frac{\Delta p_0}{L_0}, \quad \rho_i^\circ \alpha_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \sim \frac{\rho_i^\circ \alpha_{i0} v_0 \Delta v_0}{L_0} \ll \frac{\Delta p_0}{L_0}. \quad (4.1)$$

Here  $\alpha_{i0}$  and  $v_0$ , are characteristic values of the volume concentrations and velocities;  $\Delta v_0$  and  $\Delta p_0$  are characteristic values of the velocities changing and pressure drop for the case;  $t_0$  is a characteristic value of time, when velocity changing  $\Delta v_0$  takes place;  $L_0$  is a characteristic tube length, where the pressure drop  $\Delta p_0$  or velocity changing  $\Delta v_0$  take place. The drift flux approximation is applicable for the case, if the estimations (4.1) are valid, i.e

$$\frac{\rho_i^\circ \alpha_{i0} v_0 \Delta v_0}{\Delta p_0} \ll 1, \quad \frac{t_0}{L_0} \gg \frac{\rho_i^\circ \alpha_{i0} \Delta v_0}{\Delta p_0}. \quad (4.2)$$

Note for the steady flow ( $t_0 \rightarrow \infty$ ) only the second condition is non-trivial. Drift flux approximation may be used not only for steady and for non-steady flows too, but the characteristic time of the non-steadyness  $t_0$  must be large enough to satisfy the second equation (4.2).

The Archimedes force for inertia free flow is determined only by the gravity acceleration.

Thus the momentum conservation equations for the dispersed flow, when the second phase is surrounded by the first phase and is acted by Archimedes force from the first phase, may be written in the quazi-static view:

$$-\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \alpha_1 M_* - \alpha_1 F_{W1} + \rho_1^\circ \alpha_1 g^x = 0, \quad (4.3)$$

$$-\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_1 M_* - \alpha_2 F_{W1} - F_{W2} + \rho_2^\circ \alpha_2 g^x = 0, \quad (M_* = n f_*).$$

Adding these equations and subtracting them after dividing on  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  correspondingly we have another *identical* form of these equations:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - F_{W2} - F_{W1} + (\rho_1^\circ \alpha_1 + \rho_2^\circ \alpha_2) g^x = 0, \quad (4.4)$$

$$M_* - F_{W2} + (\rho_2^\circ - \rho_1^\circ) \alpha_2 g^x = 0,$$

To close the system of equations (2.1), (4.3) it is necessary to write the equations for the forces  $M_*$ ,  $F_{W1}$ ,  $F_{W2}$  through  $\alpha_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ , physical properties of the phases: true densities  $\rho_1^\circ$  and  $\rho_2^\circ$ , viscosities of the phases  $\mu_1$  and  $\mu_2$ , surface tension  $\sigma$ , and characteristics of the tube: diameter  $D$  and roughness  $\delta/D$  of its internal surface. This is a fundamental problem of using of the momentum equations that is distinguish mechanistic theory, in particular, two-fluid model.

### 5. Interaction forces on the interface surfaces

Interface force between the dispersed ( $i = 2$ ) and the carrier ( $i = 1$ ) phases may be written in the following form

$$f_* = \pi a^2 C_{12} \frac{\rho_1^\circ |v_1 - v_2| (v_1 - v_2)}{2}, \quad n = \frac{3\alpha_2}{4\pi a^3}, \quad (5.1)$$

$$M_* = n f_* = \frac{3C_{12}\alpha_2}{8a} |v_1 - v_2| (v_1 - v_2)$$

$$C_{12} = (\mathbf{Re}_{12}, \alpha_2, \mathbf{Lp}_{12}, \tilde{\rho}^\circ), \quad \mathbf{Re}_{12} = \frac{2a\rho_1^\circ |v_1 - v_2|}{\mu_1}, \quad \mathbf{Lp}_{12} = \frac{2a\rho_1^\circ \sigma}{\mu_1^2}, \quad \tilde{\rho}^\circ = \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ}$$

Here  $C_{12}$  is a drag coefficient related to one dispersed particle (drop, bubble) considered as close to spherical by radius  $a$ , but taking into account influence of "collectivness" or finite volume concentration of the dispersed particles in the mixture unlike one sphere and influence of the shape and size change because of disintegration or coalescence for the case of drops or

bubbles. In general  $C_{12}$  may be dependant on Reynolds number  $\mathbf{Re}_{12}$ , volume concentration  $\alpha_2$ , phase true density ratio  $\tilde{\rho}^\circ$  and Laplace number  $\mathbf{Lp}_{12}$ , characterizing influence of the surface tension and viscosity on the drop or bubble shape change.

The drug coefficient dependence on Reynolds number may be presented by power function:

$$C_{12} = \frac{A^{(\gamma)}}{\mathbf{Re}_{12}^{1-\gamma}} \frac{1}{1 - \psi_2(\alpha_2, \tilde{\rho}^\circ, \mathbf{Lp}_{12})}, \quad (5.2)$$

$$A^{(\gamma)} = \text{const}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Here  $\psi(\alpha_2)$  is a coefficient taking into account influence of "collectiveness" or finite volume concentration of the dispersed phase in the mixture unlike one sphere and influence of shape and dimension changing because of a disintegration or coalescence for the case of drops or bubbles; the exponent  $\gamma$  determines the interfacial force dependence on the slip velocity:

$$M_{12} = \alpha_2 K_{12}^{(\gamma)}(\alpha_2) \cdot |v_1 - v_2|^\gamma (v_1 - v_2), \quad (5.3)$$

$$K_{12}^{(\gamma)}(\alpha_2) = \frac{3 A^{(\gamma)} \rho_1^\circ}{8a} \left( \frac{\mu_1}{2a \rho_1^\circ} \right)^{1-\gamma} \frac{\alpha_1}{1 - \psi_2(\alpha_2)}$$

There is a sense to emphasize two extreme cases in (5.1): creep flow ( $\mathbf{Re}_{12} < 1$ ,  $C_a = 24/\mathbf{Re}_{12}$ ,  $\gamma = 0$ ,  $A^{(\gamma)} = A^{(0)} = 24$ ), when the interfacial force is proportional to the slip velocity and dynamic viscosity of the carrier liquid and does not depends on the density of the carrier liquid:

$$M_{12} = \alpha_2 K_{12}^{(0)}(v_1 - v_2), \quad K_{12}^{(0)}(\alpha_2) = \frac{9\mu_1}{2a^2} \frac{1}{1 - \psi_2(\alpha_2)}, \quad (5.4)$$

and when the interfacial force is proportional to the square of slip velocity ( $\mathbf{Re}_{12} \gg 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $A^{(\gamma)} = A^{(1)}$ ,  $C_a = A^{(1)} = \text{const}$ ) and the density of the carrier liquid but does not depend on the its viscosity:

$$M_{12} = \alpha_2 K_{12}^{(1)} |v_1 - v_2| (v_1 - v_2), \quad K_{12}^{(1)}(\alpha_2) = \frac{3 A^{(1)} \rho_1^\circ}{8a} \frac{1}{1 - \psi_2(\alpha_2)}. \quad (5.5)$$

The wall interaction on the carrier phase by force  $F_{W1}$  (related per unit volume) is initiated be shear stress  $\tau_{W1}$  along the perimeter of the tube wall and may be presented in the following form:

$$F_{W1} = \frac{\pi D \tau_{W1}}{\frac{1}{4} \pi D^2} = \frac{4 \tau_{W1}}{D}, \quad \tau_{W1} = C_D \frac{\rho_1^\circ |v_1| v_1}{2} \frac{1}{1 - \psi_D(\alpha_2)}, \quad (5.6)$$

$$C_D = C_D(\mathbf{Re}_1, \frac{\delta}{D}), \quad \mathbf{Re}_1 = \frac{\rho_1^\circ v_1 D}{\mu_1}.$$

Here  $C_D$  is drag force coefficient on the tube wall,  $\delta/D$  is a roughness of its internal surface, the last multiplier in the expression for  $\tau_{W1}$  (determined by coefficient  $\psi_D$ ) takes into account influence of disturbances because of the dispersed phase on the wall friction force with the carrier phase. The function  $\psi_D(\alpha_2)$  as  $\psi_2(\alpha_2)$  may be different in different diapasons of Reynolds numbers  $\mathbf{Re}_1$ ,  $\mathbf{Re}_{12}$  and Laplace number  $\mathbf{Lp}_{12}$ . Note that for practice the most typical is turbulent flow with the square dependence of wall friction on the carrier phase velocity  $v_1$ . Then by analogy (5.5), detaching the dependence on the velocity  $v_1$  the expression for  $F_{W1}$  may be rewritten:

$$F_{W1} = K_1(\alpha_2) \cdot |v_1| v_1, \quad K_1(\alpha_2) = \frac{2\rho_1^\circ}{D} \frac{C_D}{1 - \psi_D(\alpha_2)}, \quad (5.7)$$

As to the interaction with the wall it seems quite natural from the first sight to neglect the direct wall interaction on dispersed phase

$$F_{W2} = 0, \quad (5.8)$$

supposing that contacts between the dispersed particles and the wall are absent. Nevertheless for the gas with liquid drops or solid particles flows such contacts due to collisions and reflections may occur ( $F_{W2} \neq 0$ ) and influence on the process. But even for bubble up flows the investigations of distribution of the bubbles in the cross-section shows the anomalously high concentration of the bubbles *not only near* the wall (Nakoryakov et al [8], Serizava et al [9, 10], Heringe & Davis [11], Sekoguchi et al [12, 13]), but even *on and along* the wall (Fig. 1), where the bubbles *contact* with the wall and moves along the wall with the velocity  $v_{2W}$ , *differing* from the averaged on the tube cross section velocity  $v_2$ . The picture looks as the bubbles, moving on the wall, are pressed to the wall by a lateral hydrodynamic force from the liquid<sup>5</sup>. It means the contacts may initiate the direct force  $F_{W2}$  on the bubbles from the wall.

But even though the bubbles near the wall don't touch the wall they are surrounded by the liquid having smaller velocity than averaged velocity  $v_1$ . It leads that the wall brakes the near wall bubbles through the near wall liquid. This situation is analogous to the slug flow.

By analogy with (5.6) it is natural to assume this force is proportional to the perimeter of the tube and volume concentration of the bubbles and that is why it may be presented in the view

<sup>5</sup> This phenomena is seen explicitly on the movie made by colaborators of Dr. J. Bataille at the Laboratory of Fluid Mechanics and Acoustics of Central School in Lyon.

$$F_{W2} = \frac{\alpha_2 \pi D \tau_{W2}^\circ}{\frac{1}{4} \pi D^2} = \frac{4\alpha_2 \tau_{W2}^\circ}{D} \quad (\tau_{W2}^\circ = K_2 v_{2W}). \quad (5.9)$$

where  $K_2$  is a dispersed particle and wall interaction coefficient, and depending on the volume concentration  $\alpha_{2W}$  of the dispersed particles on the wall, their dimension, velocities of the phases, physical properties of the phases:

$$K_2 = K_2(\alpha_{2W}, v_{2W}, a, \mu_1, \sigma). \quad (5.10)$$

### 6. Force equilibrium equations for the pressure gradient and for the slip velocity in dispersed flow.

Adding momentum conservation equations (4.3) for non-inertia force flow (drift flux flow) we have momentum balance for the two phase mixture (the first equation (4.4)):

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - K_1 |v_1| v_1 - F_{W2} + (\rho_1^\circ \alpha_1 + \rho_2^\circ \alpha_2) g^x = 0, \quad (6.1)$$

The second momentum equation for relative motion may be derived from (4.3) dividing the first equation on  $\alpha_1$ , the second equation on  $\alpha_2$  and subtracting them or taking the second equation(4.4):

$$-K_{12}^{(\gamma)}(\alpha_2) \cdot |v_2 - v_1|^\gamma (v_1 - v_2) + \frac{F_{W2}}{\alpha_2} + (\rho_1^\circ - \rho_2^\circ) g^x = 0. \quad (6.2)$$

Here the equation (5.9) for  $F_{W2}$  was taken into account and for  $K_{12}^{(\gamma)}$  only dependency on volume concentration  $\alpha_2$  is marked, because this dependency is more important for the consideration. The expression for the slip velocity from the equation has the following view

$$|v_2 - v_1|^\gamma (v_2 - v_1) = - \frac{(F_{W2} / \alpha_2) + (\rho_1^\circ - \rho_2^\circ) g^x}{K_{12}^{(\gamma)}}. \quad (6.3)$$

One should mark that the slip velocity is not influenced directly by the external wall friction force ( $F_{W1}$ ) on the first (carrier) phase. External wall force influence on the slip velocity only through the dispersed phase ( $F_{W2}$ ). It is important to remember that this slip velocity equation fits only for the dispersed flows where one of the phase is surrounded by the other and is acted by Archimedes force from the carrier phase. This slip velocity equation doesn't fit for the annular flow but may be generalized for a slug flow (see below).

It is naturally to propose that the force,  $F_{W2}$ , connected with the interaction of the wall on the some part of the dispersed particles or bubbles, contacting with the wall much smaller then the interface force,  $|M_{12}| =$

$\alpha_2 K_{12}^{(\gamma)} |v_1 - v_2|^{\gamma+1}$ , connected with the carrier phase interaction on the all dispersed particles (see (3.1) or (4.3)). In this case the first component in the square bracket term is much smaller than the second component:

$$F_{W2}/\alpha_2 \ll (\rho_1^\circ - \rho_2^\circ)g \quad (6.4)$$

Then the slip velocity equation (6.3) may be presented in the simplified approximation for upward flow ( $g^x = -g$ )

$$v_2 - v_1 = \left[ \frac{(\rho_1^\circ - \rho_2^\circ)g}{K_{12}^{(\gamma)}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \left( 1 - \frac{F_{W2}/\alpha_2}{(\gamma+1)(\rho_1^\circ - \rho_2^\circ)g} \right). \quad (6.5)$$

The equations (6.3) (or its simplified version (6.5)) determines the slip velocity by the physical properties of the phases ( $\rho_1^\circ, \rho_2^\circ$ ) and by the parameters of interphase ( $K_{12}^{(\gamma)}, \gamma$ ) and external ( $g^x, F_{W2}/\alpha_2$ ) forces.

### 7. Two-fluid model for the vertical up slug flow

The slug upward vertical flow is characterized by as named "Taylor bubble" which has the shape of bullet (Fig. 2). Theory and experiment shows (Dumitrescu [14]) that the head surface of the Taylor bubble is close to spherical with radius

$$R_H \approx \frac{3}{8}D. \quad (7.1)$$

Then down the surface is turned asymptotically to cylindrical separated from the wall by a liquid *film*. Down the thickness of the film smoothly decreases from  $\delta \approx \frac{1}{8}D$  till some fixed value  $\delta \approx \delta_\infty$ . The lateral surface of Taylor bubble  $S_{Bf}$  being at the same time by the interface surface of the film may be wavy. Macroscopically it may be considered as close to cylindrical with smoothly variable radius  $R_B(x)$

$$R_H < R_B(x) < (\frac{1}{2}D - \delta_\infty), \quad (R_H \approx \frac{3}{8}D). \quad (7.2)$$

Very often the film separating Taylor bubble from the tube wall is thin and the length  $L_B$  of the Taylor bubble is long in compare with the diameter of the tube:

$$2\delta = D - 2R_B \ll D, \quad L_B \gg D. \quad (7.3)$$

That is why there is the sense to characterize the lateral surface of the Taylor bubble by the averaged diameter  $\langle D_2 \rangle$  corresponding to averaged film thickness  $\langle \delta_f \rangle$ :

$$2(\frac{3}{8}D) < \langle D_2 \rangle < D - 2\delta_\infty, \quad \delta_\infty < \langle \delta_f \rangle < \frac{1}{8}D. \quad (7.4)$$

The Taylor bubbles separated from each other by the liquid layers which are named as (liquid) *slugs*. The slugs may have small bubbles. But here we consider the case when the bubble volume content in the slugs is negligibly small. The slug is bordering with Taylor bubble by hemispherical surface  $S_{12H}$  and wavy down surface  $S_{Bd}$  which by analogy with  $S_{Bf}$  may be considered as plane.

For simplification let us suppose that all Taylor bubbles are identical and the distances between them are identical too or by other words we consider periodical slug flow. Having in mind mainly long slugs ( $L_B \gg D$ ) let us consider one period of the flow or one representative cell (see Fig. 2) with the volume  $V$  and length  $L$  bounded by up,  $S_u$ , and down,  $S_d$ , planes and cylindrical surface of the tube wall  $S_W$  having one Taylor bubble with the volume  $V_2 \equiv V_B$ :

$$V = \frac{1}{4} \pi D^2 L,$$

$$V_2 \equiv V_B = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{3}{8} D\right)^3 + \frac{1}{4} \pi \langle D_2 \rangle^2 (L_2 - \frac{3}{8} D) \approx \frac{1}{4} \pi \langle D_2 \rangle^2 L_2, \quad (7.5)$$

$$S_u = S_d = \frac{1}{4} \pi D^2, \quad S_W = \pi D L.$$

For the given void fraction  $\alpha_2$  presented only by Taylor bubble volume  $V_B \equiv V_2 \equiv \alpha_2 V$  the length of the Taylor bubble  $L_2$  may be presented in the following view:

$$L_2 - R_H = \frac{(V_2 / \pi) - \frac{2}{3} (\frac{3}{8} D)^3}{\frac{1}{4} \langle D_2 \rangle^2} = \frac{1 - \bar{d}}{(1 - \bar{\delta})^2} \alpha_2 L, \quad (R_H \approx \frac{3}{8} D) \quad (7.6)$$

$$\left( \alpha_2 = \frac{V_2}{V}, \quad \bar{d} = \frac{9}{256} \frac{D}{L} \ll 1, \quad \bar{\delta} \equiv \frac{2 \langle \delta_f \rangle}{D} \ll 1 \right).$$

The liquid or carrier phase in the cell has three components: the first is the liquid in the up volume  $V_{1u}$  over the Taylor bubble having the averaged axial velocity  $v_{1u}$ , the second is in the down volume  $V_{1d}$  under the Taylor bubble having the averaged velocity  $v_{1d}$  and the third is in the film volume  $V_{1f}$  having the averaged axial velocity  $v_{1f}$ :

$$v_{1u} = \frac{1}{V_u} \int_{V_u} v'_1 d'V, \quad v_{1d} = \frac{1}{V_d} \int_{V_d} v'_1 d'V, \quad v_{1f} = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} v'_1 d'V. \quad (7.7)$$

Below it is shown that

$$v_{1u} = v_{1d}, \quad (7.8)$$

that is why there is a sense to use averaged velocity and length of the liquid slug

$$v_{1s} \equiv v_{1u} = v_{1d}, \quad L_s = L - L_2, \quad V_s = V - V_2 \quad (7.9)$$

At that the averaged velocity of the carrier liquid  $v_1$  and volume concentration  $\alpha_1$  together with the volume concentrations of the marked components are:

$$\alpha_1 = \frac{V_1}{V}, \quad \alpha_{1s} = \frac{V_{1s}}{V}, \quad \alpha_{1f} = \frac{V_{1f}}{V} \quad (7.10)$$

$$\alpha_1 = \alpha_{1s} + \alpha_{1f}$$

$$v_1 = \frac{1}{V_1} \int_{V_1} v'_1 d'V = \frac{\alpha_{1s} v_{1s} + \alpha_{1f} v_{1f}}{\alpha_1},$$

$$(V = V_1 + V_2, \quad V_1 = V_{1s} + V_{1f}).$$

Due to periodicity the velocity distributions and corresponding averaged values on the up section  $S_u$  and down section  $S_d$  are the same:

$$v'_1|_{S_u} = v'_1|_{S_d}, \quad (7.11)$$

The velocity of the Taylor bubble is an averaged velocity of the gas phase:

$$v_2 = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} v'_2 d'V \quad (\alpha_2 = 1 - \alpha_1). \quad (7.12)$$

The averaged mass conservation equations for this two fluid model is the same as (2.1).

Each cross section  $S(z)$  of the tube consists of two parts:  $S_1(z)$  and  $S_2(z)$  occupied by liquid and gas correspondingly

$$S(z) = S_1(z) + S_2(z) = \text{const.} \quad (7.13)$$

Then there is a sense to use the surface average velocities on the sections:

$$v_1^{(S)}(z) = \frac{1}{S_1} \int_{S_1(z)} v'_1 ds, \quad (S_1(z) = \frac{1}{4} \pi D^2 - S_2(z)). \quad (7.14)$$

It is useful to consider the axial velocity field  $w' = v'_1 - v_2$  of the fluid in the coordinate system connected with the Taylor bubble and corresponding surface averaged axial velocities:

$$w_1^{(S)}(z) = \frac{1}{S_1} \int_{S_1(z)} w'_1 ds = v_1^{(S)} - v_B. \quad (7.15)$$

This relative to the Taylor bubble velocity field in the cell is steady and corresponds to the non-compressible fluid. Then we have



$$\int_{S_1(z)} w_1'(z) dz = w_1^{(S)}(z) S_1(z) = (v_1^{(S)}(z) - v_B) S_1(z) = \text{const.} \quad (7.16)$$

In particular introducing a specified slip velocity  $w_1^\circ > 0$ , determining the averaged relative velocity under or above the slug where  $S_1(z) = S = \frac{1}{4} \pi D^2$  one may write

$$(v_1^{(S)}(z) - v_B) S_1(z) = -w_1^\circ S. \quad (7.17)$$

From this equation it follows  $v_{1u} = v_{1d}$  that was used in (7.9).

This equation may be used for an expression of the volume averaged velocity of the liquid:

$$v_1 = \frac{1}{V_1} \int v_1' dV = \frac{1}{V_1} \int_0^L dz \int_{S_1(z)} v_1' ds = \frac{1}{V_1} \int_0^L dz \int_{S_1(z)} (v_2 + w_1') ds. \quad (7.18)$$

Taking into account that the velocity  $v_B \equiv v_2$  is fixed for the cell we may write:

$$v_1 = v_B + \frac{1}{V_1} \int_0^L dz \int_{S_1(z)} w_1' ds = v_B - \frac{1}{V_1} \int_0^L w_1^\circ S dz = v_B - \frac{w_1^\circ}{\alpha_1}. \quad (7.19)$$

By analogy using (7.16) one may write for the film when the thickness of the film  $\delta(z)$  is small ( $2\delta \ll D$ )

$$\frac{1}{4} \pi D^2 w_{1s} = \pi D \delta(z) w_{1f},$$

$$w_{1s} = v_{1s} - v_B, \quad w_{1f}(z) = v_{1f} - v_B. \quad (7.20)$$

Then the expressions for the averaged velocities of the liquid slug (determined in (7.7) - (7.9)) and varying with the distance averaged velocity of the liquid in the near wall film (when it is thin) may be presented by the following

$$v_{1s} = v_B - w_1^\circ, \quad v_{1f}(z) = v_B - w_1^\circ \frac{D}{4\delta(z)}. \quad (7.21)$$

Momentum equation for the inertia free two-phase system follows from equilibrium equation for the cell

$$[p(L) - p(0)]S - [\tau_{Ws}(L - L_2) + \tau_{Wf} L_2] \pi D - [\rho_1^\circ \alpha_1 + \rho_2^\circ \alpha_2] g^x SL = 0, \quad (7.22)$$

where  $\tau_{Ws}$  and  $\tau_{Wf}$  are averaged tangent viscous stresses on the tube wall corresponding to the slug and film parts of the cell. Dividing this equation on the volume of the cell  $V = SL$  and taking into account that  $[p(L) - p(0)]/L$  corresponds to  $\partial p/\partial x$  one may write the equation analogous to (6.1)

$$\frac{\partial p}{\partial x} - F_{W1} - [\rho_1^\circ \alpha_1 + \rho_2^\circ \alpha_2] g^x = 0$$

$$F_{W1} = F_{Ws} + F_{Wf}, \quad (7.23)$$

$$F_{Ws} = \frac{4\tau_{Ws}}{D} \frac{L_s}{L}, \quad F_{Wf} = \frac{4\tau_{Wf}}{D} \frac{L_f}{L} \quad (L_s + L_f = L).$$

Equilibrium equation for the gas in the Taylor bubble related to the unit of the cell volume is determined by equilibrium of interface forces  $M_{12}$  on the surface  $S_B = S_{Bf} + S_{Bu} + S_{Bd}$  and gravity force

$$M_{12} + \rho_2^\circ \alpha_2 g^x = 0. \quad (7.24)$$

The interface force  $M_{12}$  related to the unit of the cell volume  $V = \frac{1}{4} \pi D^2 L$  consists of three components: Archimedes force  $M_A$ , viscous friction force  $M_f$  on the film surface, and drag or aerodynamical force  $M_s$  on the up,  $S_{Bu}$ , and down,  $S_{Bd}$ , interface surfaces of the Taylor bubble; these forces may be presented in the following view taking into account (7.6):

$$M_{12} = M_A + M_s + M_f, \quad (7.25)$$

$$M_A = -\rho_1^\circ \frac{V_2}{V} (g^x - \frac{d_1 v_1}{dt}) \approx -\rho_1^\circ \alpha_2 g^x,$$

$$M_s = -C_{Bs} \rho_1^\circ \frac{(v_{1s} - v_B)^2}{2} \frac{\frac{1}{4} \langle D_2 \rangle^2}{\frac{1}{4} D^2 L} = -C_{Bs} \rho_1^\circ (w_1^\circ)^2 \frac{(1 - \bar{\delta})^2}{2L}$$

$$C_{Bs} = \frac{A_{Bs}}{\text{Re}_{Bs}^{1-\gamma_{Bs}}}, \quad \text{Re}_{Bs} = \frac{\rho_1^\circ w_1^\circ \langle D_2 \rangle}{\mu_l} \quad (A_{Bs} = \text{const}, \gamma_{Bs} = \text{const})$$

$$M_f = \frac{\pi \langle D_2 \rangle (L_2 - R_H) \tau_{Bf}}{\frac{1}{4} \pi D^2 L} = \frac{4\tau_{Bf}}{D} \alpha_2 \frac{1 - \bar{d}}{1 - \bar{\delta}},$$

$$\tau_{Bf} = C_{Bf} \frac{\rho_g^\circ (v_B - v_\Sigma)^2}{2}, \quad C_{Bf} = \frac{A_{Bf}}{\text{Re}_{Bf}^{1-\gamma_{Bf}}}, \quad \text{Re}_{Bf} = \frac{\rho_g^\circ (v_B - v_\Sigma) D_2}{\mu_g}$$

$$(A_{Bf} = \text{const}, \gamma_{Bf} = \text{const})$$

The minus sign in the expression for  $M_f$  and  $M_s$  corresponds to the up direction of the  $x$ -axis when  $g^x < 0$  and  $M_A > 0$ . In the Archimedes force expression the absence of inertia forces is taken into account. Then  $\tau_{Bf}$  is an averaged tangent viscous stresses on the surface of the film  $S_{Bf}$  determined

by the velocity of the Taylor bubble  $v_B$  relatively to the velocity of the liquid  $v_\Sigma$  on this surface.

The multiplier  $1/L$  (conforming to number of Taylor bubbles per unit length) in the expression for  $M_s$  corresponds to the decreasing of the drag force per unit volume for the longer Taylor bubble and fixed void fraction  $\alpha_2$  due to decreasing of the number of Taylor bubbles. At that the friction force  $M_f$  must not change very strongly with increasing of the averaged length  $L$  of the Taylor bubbles as the total length of the bubbles will be the same for fixed void fraction.

It is necessary to keep in mind that interface force  $M_s$  is determined by the wake flow near the bottom of the Taylor bubble and interface force  $M_f$  may strongly depend on intensity of waves on the near wall film surface that is determined by Reynolds and Weber numbers of the film:

$$\mathbf{Re}_f = \frac{\rho_l^\circ v_{1f}^\circ \delta}{\mu_l} \quad \mathbf{We}_f = \frac{\rho_l^\circ v_{1f}^{\circ 2} \delta}{\Sigma}.$$

The pressure of the gas into the Taylor bubble is homogeneous because of the small gas density and viscosity compared with the liquid density and viscosity. The pressure in the cross section of the flow is homogeneous too. It means that pressure drop along the film is zero. Then the equilibrium equation for the film related to the unit volume of the cell may be written by the following

$$F_{wf} - M_{Bf} + \rho_l^\circ \alpha_{1f} g^x = 0. \quad (7.26)$$

The equations (7.24) and (7.25) give the possibility to derive the simple equation for slip velocity for the regime when interaction with liquid slug prevail the interaction with the film and the film is thin:

$$M_s \gg M_f, \quad \bar{\delta} \ll 1 \quad (7.27)$$

that takes place for regimes far from flooding or from the transition to annular flow. The force  $M_s$  may be presented in the view analogical to (5.3):

$$M_s = K_{Bs}^{(\gamma)} \cdot (w_1^\circ)^{1+\gamma_{Bs}}, \quad (K_{Bs}^{(\gamma)} = \frac{A_{Bs} \rho_l^\circ}{2L} \left( \frac{\mu_l}{D \rho_l^\circ} \right)^{1-\gamma_{Bs}}) \quad (7.28)$$

Taking into account the last simplifications and the relation  $v_2 - v_1 = w_1^\circ / \alpha_1$  following from (7.19) we have from the equation (7.24) :

$$K_{Bs}^{(\gamma)} \left( \frac{v_2 - v_1}{\alpha_1} \right)^{1+\gamma_{Bs}} = \alpha_2 (\rho_l^\circ - \rho_g^\circ) g. \quad (7.29)$$

Solving for the slip velocity one may write analogically to (6.5):

$$v_2 - v_1 = (1 - \alpha_2) \left[ \frac{\alpha_2 (\rho_l^\circ - \rho_g^\circ) g}{K_{Bs}^{(\gamma)}} \right]^{\frac{1}{1+\gamma_{Bs}}} \quad (7.30)$$

$$= (1 - \alpha_2) \left[ 2A_{Bs} \alpha_2 \left( 1 - \frac{\rho_g^\circ}{\rho_l^\circ} \right) g L \left( \frac{\rho_l^\circ D}{\mu_l} \right)^{1-\gamma_{Bs}} \right]^{\frac{1}{1+\gamma_{Bs}}}$$

It is necessary to keep in mind that even for long Taylor bubbles the near wall film may be not stabilized for essential part of the cell, i.e. the thickness of the film  $\delta(z)$  along the axis and averaged velocity  $v_{1f}(z)$  may be variable. It means that for long part of the flow stresses  $\tau_{Bf}$  and  $\tau_{Wf}$  may be variable along the film flow and calculation of the forces  $M_{Bf}$  and  $F_{Wf}$  may need more detailed consideration with integration of variable stresses along the flow. That essentially complicate the theory.

### 7. Zuber-Findlay drift flux law

Analysis of the experimental results for bubbly and slug upward vertical flows, attracting mass conservation equation and possible distributions of the volume concentrations and velocities of the phases in the cross section of the tube, allowed to Zuber and Findlay [15] to propose the famous and remarkable correlation for bubbly and slug flow regimes, usually named as Zuber-Findlay model, which corresponds *linear* dependency of  $v_2$  on  $j$ :

$$v_2 = C_0 j + V_{2j} \quad (8.1)$$

where the gas phase (dispersed bubbles or slugs) is marked as the second phase ( $i = 2$ ),  $C_0$  and  $V_{2j}$  are parameters, which must be determined from the experiments and which *do not depend* on  $j$  and may be considered as constants for the experimental set. But in general they may smoothly different for different regimes and diapasons of  $\alpha_2$ , for different diameters of the tube, inlet and mixing devices and orientation of the flow relatively gravitation and physical properties of the phases. In particular,  $C_0$  is smoothly decreasing with the increasing of the flow velocities and pressure. The non-trivial and even surprising sense of the Zuber-Findlay correlation is not only the formula itself but that the parameters  $C_0$  and  $V_{2j}$  *are practically constant* in some sense.

It is not difficult to express the velocity of the liquid (first) phase using the Zuber-Findlay correlation (8.1):

$$v_1 = \frac{j - \alpha_2 v_2}{\alpha_1} = \frac{j - \alpha_2 C_0 j - \alpha_2 V_{2j}}{\alpha_1} = \frac{1 - \alpha_2 C_0}{\alpha_1} j - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} V_{2j}, \quad (8.2)$$

and then using for  $v_2$  initial expression (8.1) to write the correlation for the slip velocity through the parameters of the Zuber-Findlay correlation

$$v_2 - v_1 = \frac{V_{2j}}{\alpha_1} + j \frac{C_0 - 1}{\alpha_1} \equiv \frac{V_{2j}}{\alpha_1} \left( 1 + \frac{(C_0 - 1)j}{V_{2j}} \right). \quad (8.3)$$

The most principal physical sense of this correlation that for fixed void fraction  $\alpha_2$  the *slip or two velocity effect does depend on the total volume flux  $j$* , if  $C_0 \neq 1$ , and this dependence is *linear*. It is very remarkable and non-trivial result and by author opinion the formula (8.2) may be named as *Zuber-Findlay law* for bubbly and slug flows in tube.

*What physical processes govern by this phenomena?*

It is amazing that beginning from the founder paper of Zuber and Findlay [13] in dozens of papers and books the coefficient  $C_0$  was interpreted and in detail discussed as a correlation coefficient  $C_0^*$  of cross sectional distribution of the total volume microflux  $j' \equiv \alpha'_1 v'_1 + \alpha'_2 v'_2$  and void fraction  $\alpha'_2$ :

$$C_0^* \equiv \frac{\frac{1}{A} \int_A j' \alpha'_2 dA}{\left[ \frac{1}{A} \int_A j' dA \right] \left[ \frac{1}{A} \int_A \alpha'_2 dA \right]} \equiv \frac{\langle \alpha'_2 j' \rangle}{\langle \alpha'_2 \rangle \langle j' \rangle}, \quad \left( \langle \varphi' \rangle \equiv \frac{1}{A} \int_A \varphi' dA \right). \quad (8.4)$$

For the interpretation they used identities:

$$\begin{aligned} v'_2 - j' &= v'_2 - \alpha'_1 v'_1 - \alpha'_2 v'_2 = \alpha'_1 (v'_2 - v'_1) \\ \alpha'_2 j' &\equiv \alpha'_2 v'_2 - \alpha'_2 (v'_2 - j') \equiv \alpha'_2 v'_2 - \alpha'_1 \alpha'_2 (v'_2 - v'_1), \\ \langle \alpha'_2 \rangle &\equiv \alpha_2, \quad \langle j' \rangle \equiv j, \quad \langle \alpha'_2 v'_2 \rangle \equiv \alpha_2 v_2. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Then it is not difficult to get from (8.4)

$$C_0^* \equiv \frac{\alpha_2 v_2 - \langle \alpha'_1 \alpha'_2 (v'_2 - v'_1) \rangle}{\alpha_2 j}. \quad (8.6)$$

Finally expressing this formula for  $v_2$  one may write the *identity* (8.4) in the following view

$$v_2 \equiv C_0^* j + V_{2j}^*,$$

$$(V_{2j}^* \equiv \frac{\langle \alpha'_2 V'_{2j} \rangle}{\alpha_2}, \quad V'_{2j} \equiv (v'_2 - j') \equiv \alpha'_1 (v'_2 - v'_1)). \quad (8.7)$$

This *identity* looks like Zuber-Findlay equation (8.1) with the correspondence  $C_0 = C_0^*$  and  $V_{2j} = V_{2j}^*$ . But in reality only if the specified slip velocity  $V_{2j}^*$  (determined by the averaging of  $\alpha'_1(v'_2 - v'_1)$  i.e. connected with the two velocity or slip velocity effect) does not depend on the total volume flux  $j$  one may write  $C_0 = C_0^*$  and  $V_{2j} = V_{2j}^*$ . But for  $C_0 \neq 1$  the term  $V_{2j}^*$ , connected with the two or slip velocity effect (i.e.,  $v_2 - v_1$ ) does depend on  $j$  (as it was shown in (8.3), starting from experimental Zuber-Findlay correlation itself). Really, if the averaged value

$$v_2 - v_1 = \int_A \left( \frac{\alpha'_1 v'_1}{\alpha_1} - \frac{\alpha'_2 v'_2}{\alpha_2} \right) dA = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_A (\alpha'_1 \alpha_2 v'_1 - \alpha_1 \alpha'_2 v'_2) dA$$

depends on  $j$  ( $C_0 \neq 1$ , see (8.3)) why very close to it the averaged value

$$\frac{V_{2j}^*}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \int_A (\alpha'_1 \alpha_2 v'_1 - \alpha_1 \alpha'_2 v'_2) dA$$

must not depend on  $j$ ? If one takes into account that  $V_{2j}^*$  must depend on  $j$  and if one compares the formula for  $v_2$  in the form of identity (8.7) with the experimental linear dependency on  $j$  in the form (8.3) one may conclude that  $V_{2j}^*$  depends linearly on  $j$ , or the term must be written

$$V_{2j}^* = \Delta C_0 \cdot j + V_{2j}, \quad \Delta C_0 \neq 0. \quad (8.8)$$

where  $\Delta C_0$  is a constant coefficient. That is why

$$C_0 = C_0^* + \Delta C_0, \quad C_0 \neq C_0^*, \quad V_{2j} \neq V_{2j}^* \quad (8.9)$$

By the other words only if Zuber-Findlay experimental parameter  $C_0 = 1$ , when two or slip velocity effect does not depend on  $j$  (see (8.3)) it is possible (only possible, but not necessary) that  $C_0$  coincides with  $C_0^*$  and  $V_{2j}$  coincides with  $V_{2j}^*$  or to write

$$C_0^* = C_0 = 1, \quad V_{2j} = V_{2j}^*. \quad (8.10)$$

But not reverse: even if  $C_0^* = 1$ , it is possible  $C_0 \neq 1$ . The coefficient  $C_0^*$  and specified slip velocity  $V_{2j}^*$  are determined by distribution of the microparameters for one regime characterized by  $j_1$  and  $j_2$ . The coefficient  $C_0$

and velocity  $V_{2j}$  correlate in (8.1) three relatively simply measurable averaged parameters: phase volume fluxes  $j_1, j_2$  ( $j_1 + j_2 = j$ ) and void fraction  $\alpha_2$  ( $v_2 = j_2/\alpha_2$ ). For determination  $C_0$  it is necessary to make the measurement for many regimes, i.e. for different  $j_1$  and  $j_2$ . All these three averaged and measured parameters may be realized by different distributions of the corresponding microparameters in the cross section  $A$ . The coefficient  $C_0$  is a hydraulic coefficient and in the experimental correlation (8.1) it characterizes the force interaction between the phases and though it depends on distribution of  $\alpha'_2$  and  $j'$  (characterized by  $C_0^*$ ), in some sense it has no common with the correlational kinematical coefficient  $C_0^*$  and only in some cases ( $C_0 = 1$ ) may coincide with  $C_0^* = 1$ .

*Zuber-Findlay correlation and corresponding parameters  $C_0$  and  $V_{2j}$  are governed by force interactions.*

It is interesting that for mentioned above (before (5.9)) bubbly flows with the peaks of bubble concentration near the tube wall estimations show that the correlation coefficient  $C_0^* < 1$ , but for these conditions  $C_0 > 1$  is characteristic.

The interpretation  $C_0$  as cross sectional correlation parameter  $C_0^*$  is non-correct.

Comparing coefficients  $C_0$  and  $C_0^*$  it is interesting to notice that for the determination  $C_0$  it is necessary to measure three macroscopic or averaged (by the whole cross section) parameters ( $j_2, j, \alpha_2$ ) for a few regimes, but for determination  $C_0^*$  it is necessary to measure the distribution of the microscopic characteristics, namely: velocities of the both phases ( $v'_1$  and  $v'_2$ ) and volume concentration ( $\alpha'_2$ ) in the cross section but for one regime. At that the measurement and the sense of  $\alpha'_2$  is not unequivocal because in practice the ratio of the radius of the dispersed particles to the radius of the tube is not small. It is seen that the measurements for calculation  $C_0$  are much easier than measurements necessary for calculation cross correlation parameter  $C_0^*$ .

It may be seemed all this considerations of differences between  $C_0$  and  $C_0^*$  not to be essential because  $C_0$  equal to values close to unit ( $C_0 = 1 \div 1.2$ ) and only seldom it may reach  $1.5 \div 1.6$ . But the slip velocity, what all this play is making for, is determined just by  $C_0 - 1$  and drift flux function  $V_{2j}$ . For one-velocity or "homogeneous model" ( $v_1 = v_2$ ) one has  $C_0 = 1, V_{2j} = 0$ . That is why from methodological point of view it is better to use and to discuss the coefficient  $C_0 - 1$  instead of  $C_0$ .

### 9. Solution of the reversed problem for determining of interaction coefficients from the Zuber-Findlay law equation

Comparing the Zuber-Findlay slip velocity equation (8.3) with the theoretical slip velocity equations (6.5) and (7.30), following from two velocity momentum balance equations for the inertia free *dispersed or slug* flow, we have that influence of the total flux  $j$  on the slip velocity ( $C_0 > 1$ ) may be connected only with two factors: with the external (for the flow) friction force on the wall  $F_{W2}$ , acting on the dispersed phase, or with the bubble-liquid friction coefficient  $K_{12}^{(\gamma)}(a)$  for dispersed flow or with Taylor bubble-liquid slug interaction coefficient  $K_{Bs}^{(\gamma)}(L)$ .

Firstly, increase of  $j$  decreases  $F_{W2}$  due to decrease of fraction of the bubbles near the tube wall. It may take place due to the turbulence intensification that tears near wall bubbles to the flow core. Then we may propose:

$$F_{W2} = F^\circ - kj$$

Secondly, increase of  $j$  decreases  $K_{12}^{(\gamma)}(a)$  due to increasing of bubble diameter  $2a$ . It is possible due to inlet device influence on the forming of the bubble size.

For the slug flow where there is not contacts between the gas phase and tube wall ( $F_{W2} = 0$ ) only the second factor is actual, namely increase of total volume flux  $j$  decreases  $K_{Bs}^{(\gamma)}(L)$  due to increasing of Taylor bubble length  $L$ . It is also possible due to inlet device influence on the forming of the Taylor bubble length.

Effect of the wall interaction with the bubbles and slugs ( $F_{W2}$ ) must decrease with the increasing the diameter of the tube  $D$ . It follows by three reasons:

1.  $F_{W1}$  and  $F_{W2}$  are related to the unit volume of the mixture

$$F_{W1}, F_{W2} \sim D^{-1}$$

2. Increase of  $D$  for a fixed flow velocity  $j$  or  $v_1$  must decrease the concentration of the bubbles on the wall  $\alpha_{2w}$ . It is explained by the decreasing of the cross-sectional velocity gradient  $\partial v_1 / \partial r \sim v_1 / D$  which initiates the lateral "lift" force, pushing the bubbles to the wall.

An increase of the diameter of the tube  $D$  for a fixed flow velocity  $j$  or  $v_1$  increases  $Re_1$  that testifies on an increase of turbulence intensity and spatial turbulence scale. This must intensify the mixing processes making the flow more uniform.

It is verified by the recent experiments of Johnson & White [16] with air-water flows in tube of  $D = 200$  mm. In their experiment there was no any peak concentration of the bubbles near the wall and at the same time their measurements gave  $C_0 = 1 \pm 0.02$ . Though in many experiments mainly with the smaller diameters  $C_0 = 1.1 \div 1.6$ .



It is necessary to bear in mind a reasonable remark in Zuber & Findlay [15] paper that  $C_0$  may depend on mode of gas injection in the inlet of the tube.

Experiments and present consideration would be more informative if together with the measurements of kinematical parameters  $j_1$ ,  $j_2$  and  $\alpha_2$  to make measurements of pressure gradient  $\partial p / \partial x$ , that allow to determine external force  $F_{W1} + F_{W2}$  on the flow, using equation, and to have additional and independent information about forces. Formally after making the information on  $\partial p / \partial x$  has to be used for determining coefficient  $K_1$  in the formula for the force  $F_{W1}$ .

### 10. Comparison Zuber-Findlay law correlation with Armand and Miropolskiy correlations

The first experimental correlation, determining the slip velocity in air-water gas-liquid flow in tube was Armand [17, 18] correlation, that may be presented as

$$\alpha_2 = 0.833 \beta_2 \quad (\beta_2 = \frac{j_2}{j}). \quad (10.1)$$

It is not difficult to write the sequence of this correlation

$$\alpha_2 = 0.833 \frac{\alpha_2 v_2}{j},$$

and present it in the Zuber-Findlay correlation form (7.1) or (7.3)

$$v_2 = C_0 j, \quad C_0 = 1.2; \quad V_{2j} = 0. \quad (10.2)$$

$$v_2 - v_1 = \frac{0.2}{\alpha_1} j$$

It means that Armand correlation corresponds to the partial case of Zuber-Findlay law without acting Archimedes force along the flow ( $g^x = 0$ ,  $V_{2j} = 0$ ), for instance, for horizontal flow, when for  $j = 0$  we have  $v_2 - v_1 = 0$ . Comparing this slip velocity equation with the (6.3) for the case  $g^x \approx 0$  one may get

$$\frac{F_{W2}}{\alpha_2} = 0.04 K_{12}^{(1)} \frac{j^2}{\alpha_1^2}. \quad (10.3)$$

Thus for the horizontal flow described by Armand correlation this dependence on total volume flux  $j$  is quadratic as opposed to linear dependence for up bubbly or slug flow marked after (9.6). Apparently it is explained that for horizontal flow essential part of the gas flows as a turbulent gas layer directly contacting with the up part of the tube wall (without laminar liquid microlayers or thin films) and initiating the friction force  $F_{W2}$ .

Using the experimental data for vertical upward water steam flows ( $g^x = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ) Miropolskiy [19] proposed more complicated correlation

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{W_0}{v}, \quad (10.3)$$

$$W_0 = \frac{13,5(1-p/p_{cr})}{Fr^{5/12} Re^{1/6}} \equiv 13,5 \frac{g^{5/12} D^{3/12} \mu^{1/6}}{(\rho_1^0)^{1/6}} \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right),$$

$$\left( Fr = \frac{v^2}{gD}, \quad Re = \frac{\rho_1^0 v D}{\mu_1}, \quad v = \frac{\rho_1^0 \alpha_1 v_1 + \rho_2^0 \alpha_2 v_2}{\rho_1^0} \right),$$

where  $p_{cr} = 22,1 \text{ MPa}$  is a critical pressure for water,  $g$  is gravity acceleration. This correlation was obtained using the experimental data in the diapason of mass averaged velocity  $v = 0,3 \div 3,0 \text{ m/s}$  and diameter of tube  $D = 5 \div 35 \text{ mm}$ . This correlation explicitly shows the influence of the diameter of the tube, the density and viscosity of the liquid phase on the slip velocity.

The dependence for not high pressures when ( $\rho_2^0 \ll \rho_1^0, v \approx \alpha_1 v_1$ ) may be presented:

$$v_2 = \frac{W_0}{\alpha_1}, \quad v_2 - v_1 = \frac{W_0}{\alpha_1^2} - \frac{j}{\alpha_1} \quad (10.4)$$

that corresponds to the coefficients  $C_0 = 0, V_{2j} = W_0 / \alpha_1$  but doesn't correspond to the linear Zuber-Findlay law with the fixed coefficients because of the dependency of  $V_{2j}$  on the void fraction  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ . In spite of the explicit including the gravity force acceleration  $g$ , the formula apparently may correspond only for the earth condition ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ) because for the absence of the gravity ( $g = 0$ ) it gives  $v_2 = W_0 = 0$  that is not confirmed with the physical sense for the forced up flow. Then the Miropolskiy correlation (10.4) (as the Armand correlation (10.2)) doesn't take into account explicitly the influence of surface tensions. And finally because  $C_0$  for Miropolskiy correlation (10.4) is not close to unit it is likely more appropriate for annular flow ( $\alpha_2 > 0.8$ ) and there is no sense to use it for the interpretation by the slip velocity equation (6.3) or (6.5) which is proper only for bubbly or slug flow i.e. when the gas phase is dispersed phase.

### 10. Non-steady flows. Kinematical waves

Using the Zuber-Findley law equation (8.2) one may write

$$\alpha_2 v_2 = C_0 \alpha_2 j + \alpha_2 V_{2j}, \quad (11.1)$$

Substituting this equation to the second equation (2.1) and taking into account that  $j = j(t)$  one have the following quasi-linear partial differential equation for void fraction

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + j'(t, \alpha_2) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = 0 \quad (11.2)$$

$$\left( j'(t, \alpha_2) = C_0 j(t) + \frac{d}{d\alpha_2} (\alpha_2 V_{2j}) \right).$$

This equation generalizes the corresponding equation of Wallis drift flux theory (Wallis [7], Nigmatulin [1]) for taking into account the wall friction effects on slip velocity. At that the wall friction is manifested only by the coefficient  $C_0$  instead 1 in the expression for  $j'(t, \alpha_2)$ . This difference is not principal for the mathematical procedure to get a solution of the equation, because the equation is transformed by the transformation of independent variables

$$x' = x - C_0 \int_0^t j(\tau) d\tau, \quad t' = t. \quad (11.3)$$

and finally has the following view

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t'} + c(\alpha_2) \frac{\partial \alpha_2}{\partial x'} = 0 \quad \left( c(\alpha_2) = \frac{d}{d\alpha_2} (\alpha_2 V_{2j}) \right),$$

that coincides with corresponding equation for drift flux theory without wall friction. It means that wall friction influence is easy to take into account.

### Summary

1. Drift flux or quasi-static theory is an approximation when inertia forces because of the accelerations of the phases may be neglected. In this case momentum equations for the phases are equilibrium equations for friction and buoyancy interface forces between the carrier and the dispersed or slug phases together with the friction forces between the phases and the wall of the tube. For this case slip or relative velocity of the phases  $v_2 - v_1$  may be expressed by simple algebraic equation using the expressions for the mentioned friction forces in quasistatic approximation.

2. For the gas-liquid bubbly and slug vertical upward flows the famous Zuber-Findlay experimental linear law correlating the averaged velocity of the gas (dispersed or slug) phase  $v_2$  and total volume flux  $j$  takes place:  $v_2 = C_0 j + V_{2j}$ . Simple analysis of this experimental law showed that if  $C_0 > 1$ , increase of total volume flux  $j$  with fixed void fraction  $\alpha_2$  increases slip velocity  $v_2 - v_1$ .

3. Juxtaposition of the derived theoretical equations for slip velocity with the Zuber-Findlay equation gives the idea of the physical mechanisms of the effect of the increasing of slip velocity with the increasing of total

volume flux for fixed void fraction. For a dispersed flow this is explained by two mechanisms: 1) by decreasing (due to intensification of turbulence by increasing  $j$ ) concentration of the bubbles near the wall which may contact with wall and slowed down by the wall; 2) by increasing of an averaged diameter of the bubbles or averaged length of Taylor bubbles with the increasing  $j$  due to the specific influence of the inlet device.

4. It is shown inaccuracy of widespread idea, that the coefficient  $C_0$  is a correlation coefficient for total volume flux and void fraction distribution in cross asection of the tube. It is shown that  $C_0$  is determined by interface force interactions (tube wall - near wall bubbles, bubbles - liquid, Taylor bubble - liquid slug and near wall liquid film). The fact that  $C_0 > 1$  is connected with the influence of total volume flux on: 1) the bubble size (or Taylor bubble length) or 2) on the part of the bubble which may be braked by the tube wall.

5. The Zuber-Findlay law may be used as an additional experimental information for solving reversed problem: by kinematical experimental data to determine the friction force laws on interface between the gas, liquid and the tube wall.

6. The generalization of non-steady drift flux Wallis theory for kinematical waves connected with taking into account influence of wall friction on the bubbly or slug flows proved to be very simple.

#### Acknowledgments

The author is grateful for Dr. R.T. Lahey, Jr. from Rensselaer Polytechnic Institute for his very useful cooperation and discussions which gave the idea to make the analysis for the problem during the author's visiting scholarship at Rensselaer Polytechnic Institute.

#### REFERENCES

- [1] R.I. Nigmatulin Dynamics of multiphase media, Vol. 1,2. Hemisphere, New York (1991).
- [2] R. T. Lahey (Jr) "The relationship between drift correlations and interfacial shear in two-fluid models". Personal communications (1993).
- [3] R.T. Lahey (Jr), F.J. Moody, The thermal-hydraulic of a boiling water nuclear reactor, American Nuclear Society Monograph (1993).
- [4] R.I. Nigmatulin, R.T. Lahey (Jr), D.A. Drew, "Onthe different forms of momentumequations and on the intr- and interface interaction in the hydromechanics of a monodispersed mixture," Chem. Eng. Com., Memorial Issue devoted to Prof. A. Duckler (1995).
- [5] G. Batchelor, An introduction to fluid dynamics. Cambridge, Univ. Press (1970).
- [6] L.I. Sedov, Continua Mechanics, Vol. 1, 2., Moscow, Nauka (1984).
- [7] G.B. Wallis, One-Dimensional Two-Phase Flows, McGraw-Hill (1969).
- [8] V.E. Nakoryakov, A.P. Burdukov et al, "Investigation of turbulent two-phase flows". Ed. S. S. Kutateladze. Novosibirsk, ITPh (in Russian) (1973).
- [9] A. Serizava, I. Kataoka, I. Michiyosi, "Turbulence structure of air-water bubbly flow - II. Local properties," Int. J. Multiphase Flow 2, 235-246 (1975).

[10] A. Serizava, I. Kataoka, "Phase distribution in two-phase flow," Proc. Transient Phenomena in Multiphase Flow, Ed. by N. Afgan, Hemisphere, 179-224 (1988).

[11] R.A. Heringe, M.R. Davis, "Structural development of gas-liquid flows," J. Fluid Mech. 73, 97-123 (1976).

[12] K. Sekoguchi, H. Fukui, S. Yoshifusa, "Flow characteristics and heat transfer in vertical bubble flow," Proc. Two Phase Flow Dynamics, Ed. by A. E. Bergles & S. Ishigat, 59-74. Hemisphere, London (1981).

[13] T. Sekoguchi, H. Shakutsui, A. Tomiyama, H. Minagawa, S. Kitani, "Microscopic characteristics of multiphase flow using digital image processing," Proc 1st Int Conf. Multiphase Flows, - Tsukuba. Japan, 357-360 (1991).

[14] D.T. Dumitrescu, "Stromung an einer luftbase im senkreshter rohr," Z. Angew. Math. Mech. 23, 139-149, (1949).

[15] N. Zuber, J.A. Findlay, "Averaged volumetric concentration in two-phase flow systems," J. Heat Transfer 87, 453-468 (1965).

[16] A.B. Johnson, D.B. White, "Experimental determination of gas migration velocities with non-newtonian fluids," Int. J. Multiphase Flow 19, 6, 921-941 (1993).

[17] A.A. Armand, "Hydraulic resistance for two phase flow in horizontal tube," Izv. Vses. Teplotech. Inst. 1, 16-23 (in Russian) (1946). English Translation see AERE-Trans. 828, 1959.

[18] A.A. Armand, "Investigation of mechanism of two-phase flow in a vertical tube," Izv. Vses. Teplotech. Inst. 2 (in Russian) (1950).

[19] Z.L. Miropolskiy, R.I. Shneerova, A.I. Karamysheva, "Concentration of steam in forced flow of water-vapour mixture with heat influx and adiabatic conditions," Teploenergetika 5, 60-63 (in Russian) (1971).

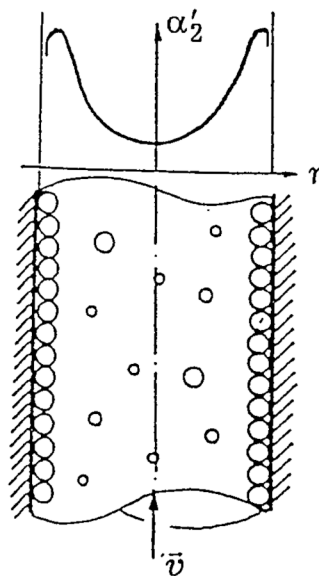


FIGURE 1. Anomalous high concentration of the bubbles along the tube wall in a vertical upward bubbly flow.



## АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О РАЗЛОЖЕНИИ ГАЗОГИДРАТОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ ДЕПРЕССИИ И НАГРЕВЕ

Р. И. Нигматулин, В. Ш. Шагапов, В. Р. Сыртланов

Институт механики многофазных систем СО РАН, 625000 Тюмень

Рассматриваются особенности разложения газовых гидратов при тепловом и депрессионном воздействии на пористую среду, в исходном состоянии полностью заполненную твердым гидратом. Установлено, что в высокопроницаемых пористых средах возможно существование зон объемного разложения, где гидрат сосуществует в равновесии с водой и газом. Исследованы автомодельные задачи о разложении гидратов при депрессии и нагреве. Показано, что существуют решения, согласно которым разложение гидратов может происходить как на поверхности фазовых переходов, так и в объемной области. Причем в первом случае разложение возможно без подвода тепла к среде и даже с его оттоком.

Большой теоретический и практический интерес к исследованию газогидратов в пористых средах в настоящее время вызван тем, что многие технологические процессы, осуществляемые в газовой, нефтяной и химической промышленности, сопровождаются образованием газовых гидратов; встречаются отложения гидратов природных газов в пористых пластах. Значительная часть теоретических и экспериментальных исследований газовых гидратов направлена на разработку эффективных способов предупреждения их образования при добыче, транспортировке и переработке газов.

Исследование некоторых аспектов процесса разложения газогидратов в пористой среде, полностью заполненной гидратом в исходном состоянии, проведено в работах [1–4]. Кроме того, как показано в [5, 6], разложение гидратов, не полностью заполняющих пористую среду в исходном состоянии, возможно в объемной зоне, когда твердый гидрат сосуществует с продуктами разложения (газ и вода).

В данной работе в рамках автомодельных решений рассматриваются особенности разложения газовых гидратов при тепловом и депрессионном воздействии на пористую среду, в исходном состоянии полностью заполненную твердым гидратом.

1. Рассмотрим фильтрационные процессы в пористой среде, полностью заполненной гидратом в исходном состоянии. При описании процессов разложения обычно принимаются следующие допущения: скелет пористой среды, гидрат и вода несжимаемы и неподвижны, пористость  $m$  постоянна, газ калорически совершенен:

$$\rho_s^0, \rho_h^0, \rho_l^0, m = \text{const}, \quad \rho_g^0 = p/R_g T, \quad v_s = v_h = v_l = 0.$$

Здесь  $\rho_i^0$  и  $v_i$  ( $i = s, h, l, g$ ) — плотности и скорости фаз;  $p$  и  $T$  — давление и температура;  $m$  — пористость;  $R_g$  — газовая постоянная; индексы  $s, h, l$  и  $g$  относятся к параметрам пористой среды, гидрата, жидкости и газа.

Для объемных содержаний фаз  $\alpha_i$  (рис. 1) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_s &= 1 - m, & \alpha_h &= m\nu, & \alpha_l &= m(1 - \nu)S_l, & \alpha_g &= m(1 - \nu)S_g, \\ \alpha_s + \alpha_h + \alpha_l + \alpha_g &= 1, & S_g + S_l &= 1, \end{aligned}$$

Пористый скелет	$\alpha_s = 1 - m$	
Газогидрат	$\alpha_h = m\nu$	$m$
Вода	$\alpha_l = m(1 - \nu)S_l$	
Газ	$\alpha_g = m(1 - \nu)S_g$	

Рис. 1

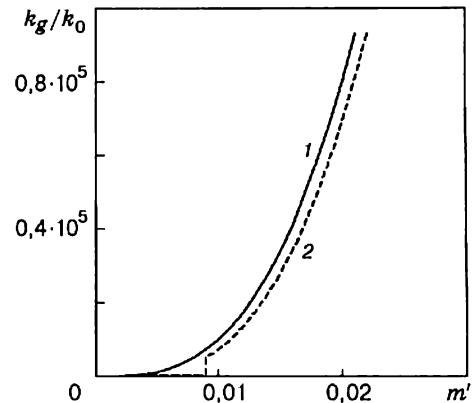


Рис. 2

где  $\nu$  — гидратонасыщенность, т. е. доля порового объема, занятая твердым гидратом. Остальная часть  $1 - \nu$  порового объема занята газом и водой, доля которых определяется газонасыщенностью  $S_g$  и водонасыщенностью  $S_l$ .

Уравнения сохранения масс, закон Дарси для продуктов разложения и уравнение притока тепла в плоскоодномерном приближении имеют наиболее общий вид в зоне объемного разложения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [m(1 - \nu)\rho_g^0 S_g] + \frac{\partial}{\partial x} [m(1 - \nu)\rho_g^0 S_g v_g] &= J_g, & \frac{\partial}{\partial t} [m(1 - \nu)\rho_l^0 S_l] &= J_l, \\ \frac{\partial}{\partial t} [m\nu\rho_h^0] &= -J, & J_g + J_l &= J, & J_g &= gJ, & J_l &= (1 - g)J \end{aligned} \quad (1.1)$$

( $J_i$  ( $i = l, g$ ) — интенсивность образования  $i$ -й фазы);

$$m(1 - \nu)S_g v_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.2)$$

( $k_g$  и  $\mu_g$  — проницаемость и динамическая вязкость для газовой фазы ( $k_l = 0$ ));

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + m(1 - \nu)\rho_g^0 S_g c_g v_g \frac{\partial T}{\partial x} &= m(1 - \nu)S_g \left( \frac{\partial p}{\partial t} + v_g \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + lJ \frac{\partial \nu}{\partial t} \\ (\rho c &= (1 - m)\rho_s^0 c_s + m[(1 - \nu)(\rho_g^0 S_g c_g + \rho_l^0 S_l c_l) + \nu\rho_h^0 c_h]). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $c_i$  — удельные теплоемкости,  $c_g$  — теплоемкость газа при постоянном давлении,  $l$  — удельная теплота разложения гидрата,  $g$  — массовое содержание газа в гидрате.

Газогидрат с пористым скелетом образует абсолютно твердое тело, и распределение давления в нем может быть произвольным с одним термодинамическим условием стабильности гидрата ( $p \geq p_s(T)$ ). Под произвольным давлением в гидрате с пористым скелетом понимается любое распределение напряжений (с первым инвариантом, определяющим давление), удовлетворяющее уравнениям статики, граничным условиям и термодинамическим условиям существования газогидрата. В трехфазной зоне (где  $\alpha_h, \alpha_l, \alpha_g > 0$ ) полагается условие равновесных фазовых переходов ( $T = T_s(p)$ ). При этом зависимость температуры фазового равновесия от давления принимается в виде

$$T_s(p) = T_{s0} + T_* \ln(p/p_{s0}), \quad (1.4)$$



где  $T_{s0}$  — температура фазового перехода, соответствующая давлению  $p_{s0}$ ;  $T_*$  — эмпирический параметр (обычно  $T_* \ll T_{s0}$ ). Согласно уравнению Клапейрона — Клаузиуса, имеем

$$\frac{dT_s}{dp} = \frac{T_s}{l} \left( \frac{1}{\rho_{gl}^0} - \frac{1}{\rho_h^0} \right), \quad \frac{1}{\rho_{gl}^0} = \frac{g}{\rho_{gs}^0(p)} + \frac{1-g}{\rho_l^0}.$$

Здесь плотность газа на линии насыщения газогидрата  $\rho_{gs}^0(p) = \rho_g^0(p, T_s(p)) = p/R_g T_s(p)$ . Учитывая (1.4), получим

$$\frac{T_s(p)}{l(p)} \left[ g \left( \frac{1}{\rho_{gs}^0(p)} - \frac{1}{\rho_l^0} \right) + \left( \frac{1}{\rho_l^0} - \frac{1}{\rho_h^0} \right) \right] = \frac{T_*}{p}.$$

Оказывается, для рассматриваемых задач переменность  $l$  незначительна. Так, в диапазоне давлений  $p = 5 \div 15$  МПа для гидрата метана  $l = (5 \cdot 10^5 \pm 2 \cdot 10^2)$  Дж/кг.

Коэффициент проницаемости газа зависит от объемной концентрации газа (или «живой» пористости). Эту зависимость зададим на основе формулы Козени (сплошная линия на рис. 2)

$$k_g = k_0 \frac{m'^2}{(1-m')^2} \simeq k_{g0} S_g^3 (1-\nu)^3 \quad (m' = \alpha_g; k_{g0} = k_0 m^3), \quad (1.5)$$

где  $m'$  — «живая» пористость, приходящаяся на газ. Задание коэффициента проницаемости в таком виде предполагает, что характерные размеры «живых» пор такие же, как и для твердого скелета. В принципе эта зависимость в зоне зарождения «живой» пористости, где она мала и может быть представлена в виде пузырьков или других несвязанных либо слабосвязанных микрообъемов, должна быть уточнена введением предельной «живой» пористости  $m'_*$ , ниже которой ( $0 \leq m' \leq m'_*$ ) проницаемость равна нулю (штриховая линия на рис. 2).

Учитывая, что в исходном состоянии пористая среда полностью заполнена гидратом, для  $S_g$  и  $S_l$ , согласно [4], имеем

$$S_l = \frac{(1-g)\rho_h^0}{\rho_l^0}, \quad S_g = \frac{\rho_l^0 - (1-g)\rho_h^0}{\rho_l^0}. \quad (1.6)$$

При разложении гидратов могут возникать три зоны, в которых соответственно присутствуют только твердый гидрат, гидрат и продукты разложения и только продукты разложения. На границах этих зон должны выполняться соотношения, следующие из закона сохранения массы и теплового баланса:

$$[m((1-\nu)\rho_g^0 S_g (v_g - \dot{x}_{(s)}) - \nu g \rho_h^0 \dot{x}_{(s)})] = 0; \quad (1.7)$$

$$\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] = -[m \nu \rho_h^0 l \dot{x}_{(s)}] \quad \left( [\psi] = \psi_+ - \psi_-, \dot{x}_{(s)} = \frac{dx_{(s)}}{dt} \right). \quad (1.8)$$

Здесь  $[\psi]$  — скачок параметра  $\psi$  на границе  $x_{(s)}$  между зонами. Температура и давление на этих границах полагаются непрерывными.

2. При одновременном тепловом и депрессионном воздействии через границу ( $x = 0$ ) пористой среды в зависимости от значений температуры  $T_e$  и давления  $p_e$  на границе можно выделить три случая. Первый, когда температура и давление на границе выше, чем  $T_0$  и  $p_{s0}$  ( $T_e > T_0$ ,  $p_e > p_{s0}$ ), где  $p_{s0}$  — равновесное давление при температуре  $T_0$ . При этом для автотемпературной задачи о внезапном изменении температуры и давления можно построить лишь решение с поверхностью фазового перехода. Для двух других случаев ( $T_e > T_0$ ,  $p_e < p_{s0}$  и  $T_e < T_0$ ,  $p_e < p_{s0}$ ) можно построить как решение с поверхностью

фазового перехода, так и (при определенных условиях для проницаемости пористой среды) решение, содержащее область с объемным разложением.

Автомодельной подстановкой  $\xi = x/\sqrt{a^{(T)}t}$  ( $a^{(T)} = \lambda/\rho c$ ) сводим систему уравнений (1.1)–(1.8) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\xi}{2} \frac{d}{d\xi} [(\mathcal{R}_g - \mathcal{R}_h)(1 - \nu)] = \frac{d}{d\xi} \left( K \mathcal{R}_g \frac{dP}{d\xi} (1 - \nu)^3 \right), \\
 & -\frac{\xi}{2} \frac{d\Theta}{d\xi} + \eta K (1 - \nu) \frac{dP}{d\xi} \frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \chi(1 - \nu) \left[ -\frac{\xi}{2} \frac{dP}{d\xi} + K(1 - \nu)^2 \left( \frac{dP}{d\xi} \right)^2 \right] - \Theta_{**} \frac{\xi}{2} \frac{d\nu}{d\xi}, \\
 & P = \frac{p}{p_0}, \quad \Theta = \frac{T}{T_0}, \quad \mathcal{R}_g = \frac{\rho_g^0}{\rho_{g0}^0}, \quad K = \frac{k_{g0} p_0 S_g}{m \mu_g a^{(T)}}, \quad \rho_{g0}^0 = \frac{p_{s0}}{RT_0}, \\
 & \mathcal{R}_h = \frac{P}{\Theta}, \quad \eta = m S_c \frac{\rho_{g0}^0 c_g}{\rho c}, \quad \chi = \eta \frac{R}{c_g}, \quad \mathcal{R}_h = \frac{g \rho_h^0}{S_g \rho_{g0}^0}, \quad \Theta_{**} = \frac{m \rho_h^0 l}{\rho c T_0}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Уравнения в области, где пористая среда полностью заполнена твердым гидратом, получаются из (2.1) при  $\nu = 1$ , а в области, где пористая среда насыщена продуктами разложения гидрата, — при  $\nu = 0$ . При этом на поверхностях скачка гидратонасыщенности граничные условия, согласно (1.6), в автомодельных координатах примут вид

$$\left[ \frac{d\Theta}{d\xi} \right] = \left[ \Theta_{**} \nu \frac{\xi(s)}{2} \right], \quad \left[ K(1 - \nu)^3 \left( \frac{dP}{d\xi} \right) \right] = \left[ \nu \left( \frac{\mathcal{R}_h}{\mathcal{R}_g} - 1 \right) \frac{\xi(s)}{2} \right],$$

а на границе пористой среды  $P = P_e$ ,  $\Theta = \Theta_e$  ( $\xi = 0$ ) и на бесконечности  $\Theta = 1$  ( $\xi = \infty$ ). Система интегрировалась при следующих значениях параметров системы гидрат — пористая среда:  $m = 0,1$ ,  $T_0 = 283$  К,  $\rho_{s0} = 5,08$  МПа,  $T_* = 10$  К,  $p_* = 2,6 \cdot 10^{-6}$  Па,  $\rho_s^0 = 2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_h^0 = 0,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_l^0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_g = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Па·с,  $\lambda_s = 2$  кг·м/(с<sup>3</sup>·К),  $\lambda_h = 2,11$  кг·м/(с<sup>3</sup>·К),  $\lambda_l = 0,58$  кг·м/(с<sup>3</sup>·К),  $\lambda_g = 3 \cdot 10^{-2}$  кг·м/(с<sup>3</sup>·К),  $c_s = 1000$  Дж/(кг·К),  $c_h = 2500$  Дж/(кг·К),  $c_l = 4200$  Дж/(кг·К),  $l = 5 \cdot 10^5$  Дж/кг.

На рис. 3,а представлено решение, отвечающее одновременному нагреву и депрессии ( $T_e > T_0$ ,  $p_e < p_{s0}$ ); линии 1–3 соответствуют проницаемости скелета  $k_{g0} = 10^{-13}$ ;  $10^{-16}$ ;  $10^{-17}$  м<sup>2</sup>. В зависимости от величины  $k_{g0}$  возможны два типа решений. Первый (линия 3) реализуется для достаточно слабой проницаемости, и для него температура на поверхности фазовых переходов выше начальной температуры гидрата (отметим, что в случае нагрева с одновременным повышением давления на границе пористой среды решение будет качественно таким же). Второй реализуется для достаточно высокой проницаемости (линия 1) и отличается от первого тем, что температура на поверхности фазовых переходов меньше, чем исходная температура системы. В данном случае разложение гидрата происходит еще и за счет притока тепла из системы, находящейся в зоне перед поверхностью фазовых переходов в перегретом состоянии. Эти два типа решений разделяются некоторым промежуточным (линия 2), согласно которому температура в зоне твердого гидрата постоянна. Штрихпунктирные линии на этом и последующих рисунках соответствуют равновесному давлению  $p_s(T)$  в зоне, заполненной твердым гидратом, а кружки — положению фронта фазового перехода.

Интересна ситуация, представленная на рис. 3,б, когда температура на границе ниже исходной температуры  $T_0$  ( $T_e < T_0$ ,  $p_e < p_{s0}$ ). В этом случае также возможны два типа решений. Решению первого типа соответствует линия 1 с температурной «ямой» вблизи границы пористой среды. Такие решения реализуются при достаточно высокой проницаемости пористой среды и характеризуются тем, что имеет место приток тепла от границы

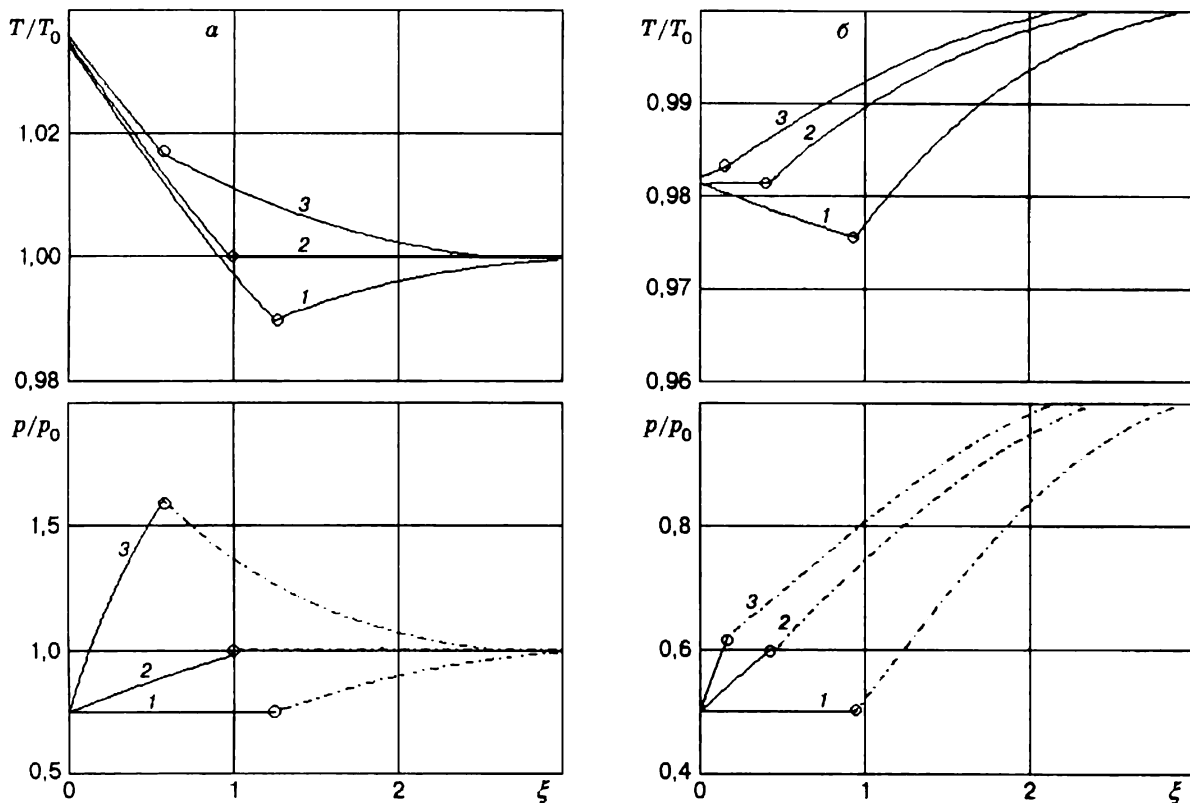


Рис. 3

к поверхности фазовых переходов, хотя температура на границе пористой среды ниже исходной. Это обстоятельство вызвано тем, что при разложении гидрата за счет депрессии ( $p_e < p_{s0}$ ) температура на поверхности фазовых переходов уменьшается еще больше и становится ниже температуры границы пористой среды. Разложение в данном случае вызывается притоком тепла как из зоны исходного твердого гидрата, так и от границы. Для решений второго типа (линия 3), реализующихся для слабой проницаемости, «перегрева» гидрата, вызванного депрессией, хватает не только на разложение гидрата, но и на отток тепла из пористой среды к ее границе (под «перегревом» здесь понимается положительная разница между исходной температурой и температурой на фронте разложения гидрата). Для промежуточного решения (линия 2) тепловой поток на границе равен нулю. В этом случае разложение происходит за счет тепла, отдаваемого «перегретым» гидратом.

3. Для исследуемой системы уравнений можно построить решение, содержащее треть (промежуточную) трехфазную объемную область, где одновременно находятся гидрат и продукты его разложения. При этом в общем случае необходимо ввести две поверхности фазового перехода: поверхность  $\xi_{(s)}^{(p)}$  между трехфазной зоной, где присутствуют твердый гидрат и газожидкостная смесь, и зоной чистого гидрата и поверхностью  $\xi_{(s)}^{(T)}$  между зоной, где присутствуют только продукты разложения, и трехфазной зоной.

Система уравнений в этом случае совпадает с (2.1), причем в области  $\xi_{(s)}^{(T)} < \xi < \xi_{(s)}^{(p)}$  добавляется условие фазового равновесия для гидрата (1.4). Граничные условия запишем в следующем виде:

для  $\xi = \xi_{(s)}^{(p)}$

$$K(1 - \nu^-)^2 \left( \frac{dP}{d\xi} \right)^- = \left( \frac{\mathcal{R}_{h^*}^0}{\mathcal{R}_{g(s)}^{0(p)}} - 1 \right) \frac{\xi_{(s)}^{(p)}}{2}, \quad \left( \frac{d\Theta}{d\xi} \right)^+ - \left( \frac{d\Theta}{d\xi} \right)^- = \Theta_{**}(1 - \nu^-) \frac{\xi_{(s)}^{(p)}}{2}; \quad (3.1)$$

для  $\xi = \xi_{(s)}^{(T)}$

$$K \left( \frac{dP}{d\xi} \right)^- - K(1 - \nu^+)^2 \left( \frac{dP}{d\xi} \right)^+ = \nu^+ \left( \frac{\mathcal{R}_{h^*}^0}{\mathcal{R}_{g(s)}^{0(T)}} - 1 \right) \frac{\xi_{(s)}^{(T)}}{2}, \quad \left( \frac{d\Theta}{d\xi} \right)^+ - \left( \frac{d\Theta}{d\xi} \right)^- = \Theta_{**} \nu^+ \frac{\xi_{(s)}^{(T)}}{2}. \quad (3.2)$$

Если максимальное значение коэффициента проницаемости газа  $k_g$ , реализующееся при  $\nu = 0$ , достаточно большое и удовлетворяет условию  $a^{(p)}/a^{(T)} > 2$ , то система уравнений (2.1) для заданных значений температуры и давления на границе пористой среды допускает множество решений, содержащее промежуточную трехфазную область. Эта совокупность решений простирается от решения с одной поверхностью фазового перехода ( $\xi_{(s)} = \xi_{(s)}^{(T)} = \xi_{(s)}^{(p)}$ ), когда гидратонасыщенность на границе меняется от исходного значения  $\nu^+ = 1$  до  $\nu^- = 0$ , до предельного решения, когда на передней границе ( $\xi = \xi_{(s)}^{(p)}$ ) гидратонасыщенность меняется от  $\nu^+ = 1$  до  $\nu^- = \nu_m$  ( $\nu_m > 0$ ). Иначе говоря, для любого значения гидратонасыщенности  $\nu^-$  со стороны трехфазной зоны на поверхности между этой зоной и областью чистого гидрата ( $\nu = 1$ ), удовлетворяющего условию  $0 \leq \nu^- \leq \nu_m$ , можно построить решение. Причем предельная гидратонасыщенность  $\nu_m$  зависит от максимального значения коэффициента проницаемости  $k_g(\nu)$ . При  $\nu^- > \nu_m$  решение, входящее в указанное семейство, отсутствует, а это, в свою очередь, означает, что в случае  $\nu^- > \nu_m$  в трехфазной области поле давления, которое, согласно (1.4), однозначно определяется полем температуры, не способно транспортировать продукты разложения гидрата (в данном случае газ) через пористую среду. Отметим, что в общем принцип выделения единственного решения неизвестен и требует дальнейших исследований. Совокупность решений можно сузить, например, если допустить, что в зоне зарождения «живой» пористости (когда гидратонасыщенность близка к единице) газ представляет собой систему несвязанных или малосвязанных микрообъемов. Тогда фильтрация газа начинается, когда гидратонасыщенность становится ниже некоторого критического значения  $\nu = \nu^*$ . Соответствующее значение «живой» пористости больше  $m'_*$  (штриховая линия на рис. 2). Если эта критическая гидратонасыщенность  $\nu^*$  меньше, чем предельное значение  $\nu_m$ , то областью значений для  $\nu^-$  является промежуток  $0 \div \nu^*$ .

На рис. 4,а приведены решения для  $k_{g0} = 10^{-13} \text{ м}^2$ , отвечающие различным значениям гидратонасыщенности  $\nu^-$ . Предельное значение для гидратонасыщенности  $\nu_m = 0,96$ . Кривые 1–3 соответствуют различным скачкам гидратонасыщенности на границе частичного разложения, а 4 — решению без учета теплопроводности, полученному в [4].

Другая возможность выбора дополнительного условия состоит в анализе граничных условий (3.1) и (3.2); с учетом решения уравнения (2.1) в зоне твердого гидрата, пренебрегая  $\mathcal{R}_g^i$  по сравнению с  $\bar{\kappa}_{h^*}^0$ , можно получить

$$1 - \Theta_{(s)}^{(p)} = \Theta_{**}(1 - \nu^-)(1 + a^{(p)}/a^{(T)})/\varphi(\xi_{(s)}^{(p)}). \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) при фиксированной автомодельной координате  $\xi_{(s)}^{(p)}$  связывает температуру на границе частичных фазовых переходов с гидратонасыщенностью на этой границе. Причем величина  $1 - \Theta_{(s)}^{(p)}$  при некотором значении  $\nu^- = \nu_m$  имеет минимум, так

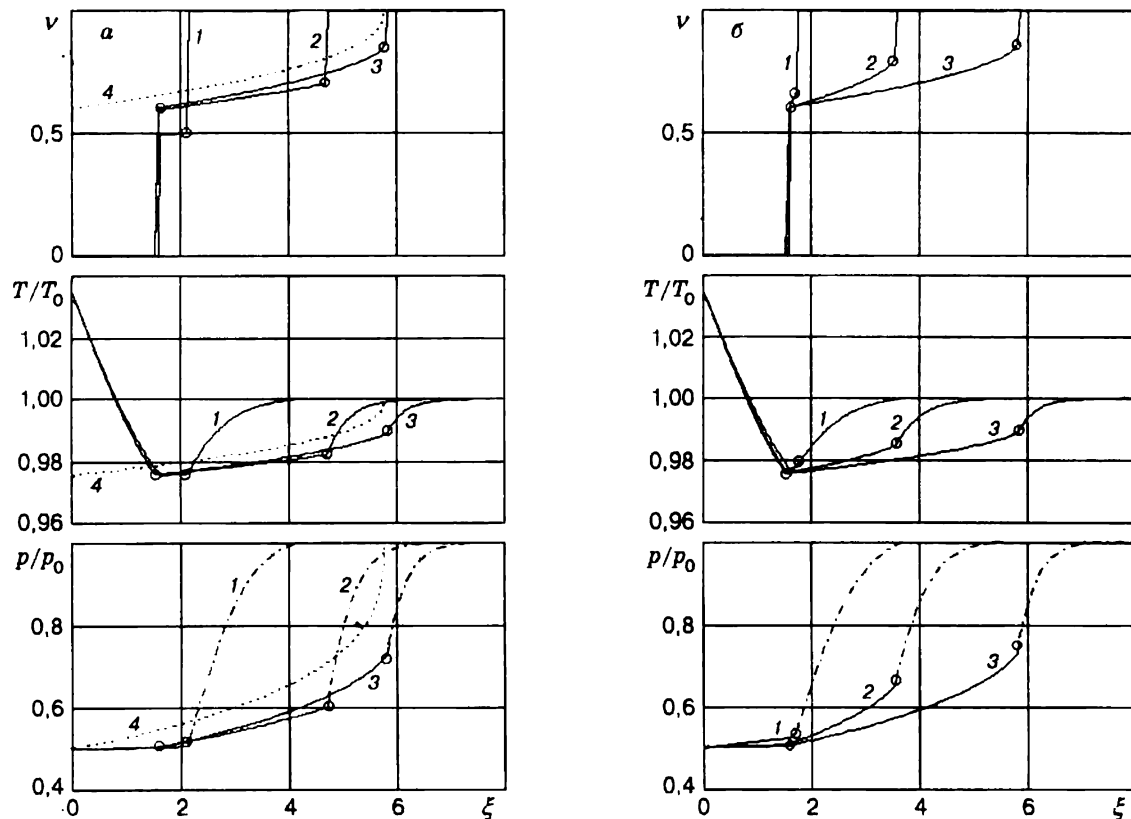


Рис. 4

что  $a^{(p)}/a^{(T)} = 2$ . Левая ветвь зависимости  $1 - \Theta_{(s)}^{(n)}$  от  $1 - \nu^-$ , очевидно, лишена физического смысла, поскольку здесь большему перепаду температуры между исходной температурой системы и температурой на поверхности частичного фазового перехода соответствует меньший перепад гидратонасыщенности (т. е. более интенсивный тепловой поток обеспечивает более слабый фазовый переход). Таким образом, существует максимальное значение гидратонасыщенности  $\nu_m$ , при котором еще возможны решения с объемным разложением гидрата. Иначе говоря, в трехфазной зоне всегда должно быть  $a^{(p)}/a^{(T)} > 2$  ( $\nu < \nu_m$ ). Для слабопроницаемой пористой среды, когда  $a^{(p)}/a^{(T)} < 2$ , при всех  $\nu$  вообще нельзя построить решение с объемной зоной разложения. В этом случае существует единственное решение, согласно которому разложение будет происходить на поверхности фазового перехода.

На рис. 4, б представлено распределение параметров для предельных решений (когда  $\nu^- = \nu_m$ ) при  $k_{g0} = 10^{-14}$ ;  $4 \cdot 10^{-14}$ ;  $10^{-13} \text{ м}^2$  (кривые 1-3). Видно, что при уменьшении проницаемости зона разложения гидрата сужается, в пределе переходя в поверхность фазовых переходов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского правительства (грант 96-15-96001).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черский Н. В., Бондарев Э. А. О тепловом методе разработки газогидратных месторождений // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 3. С. 550-552.

2. **Веригин Н. Н., Хабибуллин И. Л., Халиков Г. А.** Линейная задача о разложении гидратов газа в пористой среде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980. № 1. С. 174–177.
3. **Цыпкин Г. Г.** О разложении газовых гидратов в пластах // Инж.-физ. журн. 1991. Т. 60, № 5. С. 736–742.
4. **Сыртланов В. Р., Шагапов В. Ш.** Диссоциация гидратов в пористой среде при депрессионном воздействии // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 120–130.
5. **Бондарев Э. А., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г.** К математическому моделированию диссоциации газовых гидратов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308, № 3. С. 575–577.
6. **Максимов А. М., Цыпкин Г. Г.** О разложении газовых гидратов, сосуществующих с газом в природных пластах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 5. С. 84–88.

*Поступила в редакцию 6/VIII 1996 г.*

---

## ГЕОЛОГИЯ

УДК 531.4 + 551.242.4

## ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ТЕПЛОВЫХ АНОМАЛИЙ ГОРЫ ЯНГАНТАУ НА ЮЖНОМ УРАЛЕ

© 1998 г. Академик Р. И. Нигматулин, Т. Т. Казанцева, М. А. Камалетдинов, Ю. В. Казанцев

Поступило 11.06.98 г.

Гора Янгантау представляет собой возвышенность, вытянутую с юго-запада на северо-восток вдоль правого берега р. Юрюзань между деревнями Чулпан и Ильтаево Салаватского района Республики Башкортостан. В пределах вершинной части горы известно пять площадок, где из недр просачивается горячий пар и газы – лечебная основа великолепного курорта. Названная гора расположена в южной части Юрюзано-Сылвинской впадины Предуральяского прогиба (рис. 1). История выяснения генезиса тепловых аномалий горы Янгантау длится более двух столетий. Основные известные гипотезы сводятся: 1) к подземному пожару битуминозных сланцев, возникшему в результате удара молнии; 2) к окислению битуминозных сланцев с самонагреванием и тлением; 3) к химическим реакциям с выделением тепла (при переходе закиси железа в окись и др.); 4) к теплу, возникшему в результате трения горных пород в зонах сбросов; 5) к теплу магматического очага; 6) к радиоактивному теплу, поднимающемуся с больших глубин.

Анализируя соответствие предложенных гипотез уровню современных знаний по геологии региона, мы приходим к выводу, что представления, основанные на экзогенных факторах (три первые гипотезы) исчерпали свои возможности. Достаточно подкрепить это заключение такими данными, как: а) присутствие аномальных температурных явлений не только на горе Янгантау и не только в осадках перми этого региона; б) приуроченность более прогретой плоскости горы Янгантау к горизонтам слабой до средней обогащенности битуминозным веществом, а не к наиболее богатым им, как следовало бы ожидать при экзогенном подходе. Следует оставить без внимания и механизм радиоактивного разогрева в силу довольно низких значений радиации пород и водных источников региона (от 0.03 до 2 ед. Махе). Магматическая же гипотеза не согласуется с амагматичностью всех краевых прогибов мира.

Для выяснения генезиса теплоаномалий горы Янгантау необходимо использовать не задействованные ранее сведения: шарьяжно-надвиговый стиль тектоники обеих структур с разняющимися амплитудами перемещения по надвигам (значительно большими для Каратауского аллохтона и меньшими для Юрюзано-Сылвинской впадины); субширотное простирание толщ докембрия и палеозоя Каратау при субмеридиональном палеозойских дислокаций Юрюзано-Сылвинской деп-

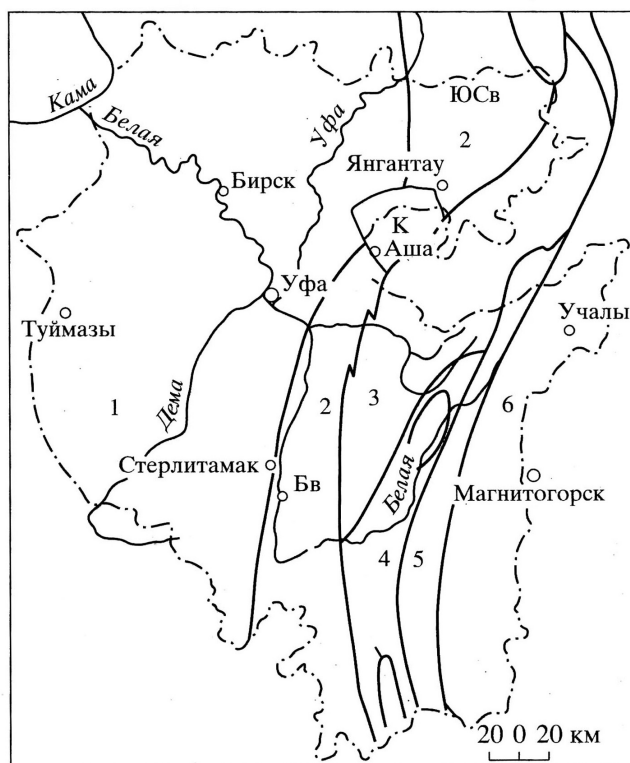


Рис. 1. Тектоническое районирование Южного Урала. Штрихпунктирная линия – граница Республики Башкортостан; сплошная линия – границы структурных зон: 1 – Восточно-Европейская платформа, 2 – Предуральский прогиб; Бв – Бельская впадина, ЮСв – Юрюзано-Сылвинская впадина; 3 – Башкирский антиклинорий; К – Каратауский аллохтон, 4 – Зилаирский синклиний, 5 – Уралтауская структура, 6 – Магнитогорский синклиний.



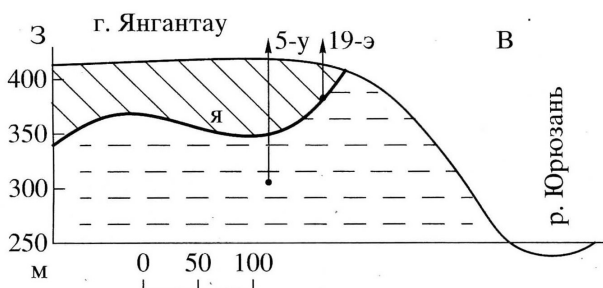


Рис. 2. Схематический геологический разрез горы Янгантау. Я – Янгантауский надвиг.

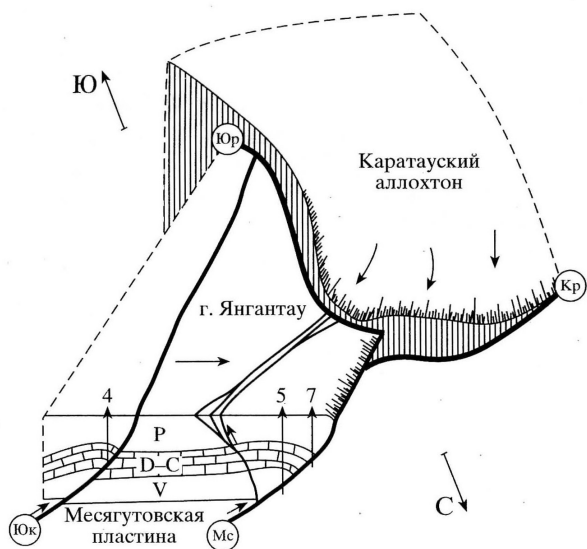


Рис. 3. Тектоническое сочленение каратауского аллохтона и Месягутовской пластины (вид с севера). Мс – Месягутовский надвиг; Юк – Юкаликулевский надвиг; Кр – Каратауский надвиг; Юр – Юрюзанский сдвиг.

рессии и слоев докембрия Башкирского антиклинория [1, 2]. Проведенные нами исследования по структурной геологии региона показали также, что наиболее важной особенностью структуры Юрюзано-Сылвинской впадины является развитие региональных надвигов. В ее пределах детально изучены Мечетлинский, Месягутовский, Юкаликулевский и другие надвиги, прослеживающиеся параллельно складчатому Уралу на 50–150 км. Ими впадина расчленена на тектонические пластины. Месягутовская пластина, на южном окончании которой находится гора Янгантау, обнажается в виде полосы шириной до 18 км, прослеженной на 100 км в бассейне рек Юрюзани и Ай в северо-восточном направлении. Она ограничена двумя довольно пологими надвигами восточного падения – Месягутовским на западе и Юкаликулевским на востоке, на юге осложнена сколами встречного падения (Янгантауские дислокации) (рис. 2), к которым и приурочены термоаномалии. В пограничной зоне Янгантауских дислока-

ций присутствуют литологически разнородные образования, отличающиеся прочностными свойствами и формой тел.

Каратауский аллохтон в современном виде имеет форму скошенной призмы толщиной от 1 до 5 км. Он образован поверхностью Каратауского надвига, Ашинским и Юрюзанским сдвигами.

Выполненное нами сейсмотектоническое картирование Каратауской структуры и Юрюзано-Сылвинской впадины показало, что территория названных структур в настоящее время сейсмоактивна. Сейсмическая активность согласуется с элементами структуры. Для фронта Каратауского аллохтона и Месягутовской пластины характерны повышенные значения сейсмшума, последовательно снижающиеся к тыловой зоне.

Проведенное А.С. Бобоховым изучение связи термоаномалий геологического прошлого и настоящего со структурой региона выявило, что в геологическом прошлом для территории были характерны проявления высоких значений тепла, как совпадающие с современными термоаномалиями, так и распространенные значительно шире. Теплоаномалии согласуются с элементами структур, что показано на примере Месягутовской тектонической пластины.

Данные о связи деформаций с современной сейсмичностью, с одной стороны, и с теплоаномалиями как современными, так и геологического прошлого – с другой, позволяют считать доказанной тектоническую природу термальных аномалий горы Янгантау.

Мы видим, что современная геодинамика района горы Янгантау определяется ее местоположением в сложном узле тектонического взаимодействия контрастных по составу и строению структур, а совокупность приведенных выше фактов и закономерностей может быть объяснена геодинамической моделью генезиса тепловых аномалий горы Янгантау. Согласно этой модели режим горизонтального сжатия земной коры в данном регионе реализуется тектоническим взаимодействием Каратауского аллохтона с Месягутовской пластиной Юрюзано-Сылвинской впадины по Юрюзанскому сдвигу. Это взаимодействие выражается движением Месягутовской пластины и Каратауской структуры с востока на запад с одновременным вращением последней по часовой стрелке (рис. 3). Угол Каратауской аллохтонной призмы вдавливаются в пограничную часть Месягутовской пластины, создавая высокую тектоническую нагрузку на сопредельные толщи палеозоя. В результате нарушается целостность названной пластины и в ней образуются тектонические сколы, производные движения Каратауского аллохтона.

Механическая природа тепла горы Янгантау обосновывается физическими расчетами. Рассмотрим температурный режим при взаимном скольжении двух геологических тел на основе схемы, представленной на рис. 4. Здесь изображены

векторы скоростей  $V(z)$  и температур  $T(z)$ , вдоль оси  $z$ , направленной по нормали к межслойной поверхности. При этом  $H_V$  – характерная толщина слоя, где реализуются сдвиговые деформации из-за неоднородности скоростей, а  $H_T$  – характерная толщина зоны, где имеется повышенная температура. Эволюция поля температур для представленной зоны в рамках одномерной схемы с учетом выделения теплоты трения  $Q$  из-за работы внутренних вязких напряжений  $\tau$ , из-за скорости сдвиговых деформаций  $e$  описывается обобщенным уравнением Фурье

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q, \quad Q = \tau e; \quad (1)$$

здесь  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\rho$  – плотность,  $c$  – удельная теплоемкость рассматриваемой геологической среды.

Скорость сдвиговых деформаций может быть оценена в виде

$$e \approx V/H_V, \quad (2)$$

а вторая производная температурного профиля в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx -\frac{\Delta T}{H_T^2}. \quad (3)$$

Анализ показывает, что для температурного и деформационного полей горы Янгантау характерными являются следующие величины:

$$H \approx 100 \text{ м}, \quad H_T \approx 1 \text{ м}, \quad \Delta T \approx 300 \text{ К}. \quad (4)$$

Для физических характеристик геологической среды были приняты следующие оценки:

$$\begin{aligned} \lambda &\approx 0.2 \text{ кгм/с}^3 \cdot \text{К}, \quad \rho \approx 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ c &\approx 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot \text{К}; \quad \tau \approx 100 \text{ бар} = 10^7 \text{ кг/м} \cdot \text{с}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Оценим, какова должна быть скорость относительного движения слоев (скорость надвига)  $V$ , чтобы поддерживать стационарность температурного поля ( $\partial T/\partial t = 0$ ), т.е. когда скорость рассеяния тепла из-за теплопроводности компенсировалась выделением тепла трения  $Q$ :

$$-\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q.$$

Учитывая оценки (2) и (3), имеем

$$\tau \frac{V}{H_V} = \lambda \frac{\Delta T}{H_T^2}, \quad (6)$$

и после элементарных выкладок получаем выражение для скорости надвига  $V$ , обеспечивающего

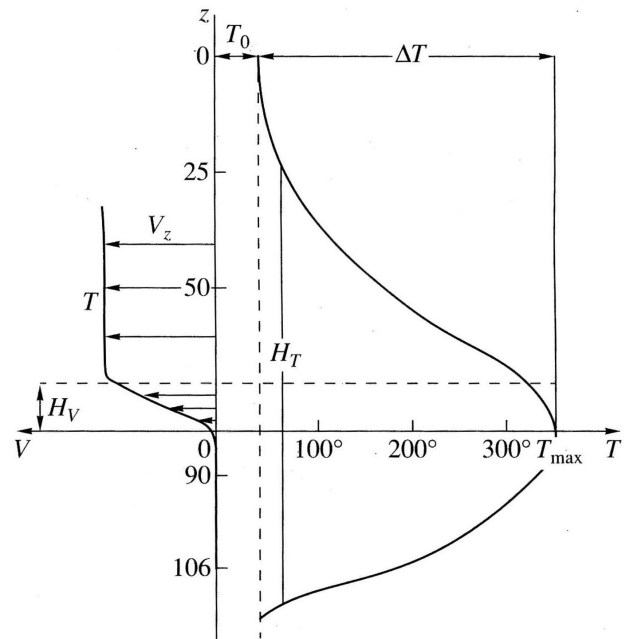


Рис. 4. Температурный режим горы Янгантау при взаимном скольжении двух геологических тел.

стационарность температурного поля:

$$V = \frac{\lambda \Delta T H_V}{\tau H_T^2}. \quad (7)$$

Для параметров (4) и (5), которые характерны для горы Янгантау, получим (учитывая, что 1 год  $V \approx 3 \cdot 10^7$  с)

$$V \approx 0.6 \cdot 10^{-9} \text{ м/с} \approx 2 \text{ см/год}. \quad (8)$$

Таким образом, для создания поля температур, наблюдаемого на Янгантау, скорость надвига должна быть порядка 2 см/год, что согласуется с геологическими оценками. Используя (1) и (3), оценим также скорость понижения температур в случае прекращения надвигания ( $V = 0$ ,  $e = 0$ ) и выделения теплоты трения ( $Q = 0$ ):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta T}{H_T^2} \approx 0.3 \cdot 10^{-8} \text{ К/с} = 10^{-1} \text{ К/год},$$

что соответствует величине порядка  $1^\circ$  за 10 лет.

Итак, 1) термальные аномалии горы Янгантау имеют тектоническое происхождение; 2) для создания температурной обстановки, идентичной современной, смещение тектонического тела по надвигу должно осуществляться со скоростью 2 см в год.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камалетдинов М.А. Покровные структуры Урала. М.: Наука, 1974. 232 с.
2. Казанцев Ю.В. Структурная геология Предуральского прогиба. М.: Наука, 1984. 185 с.

*J. Fluid Mech.* (2000), vol. 414, pp. 47–73. Printed in the United Kingdom  
© 2000 Cambridge University Press

47

## On the forced oscillations of a small gas bubble in a spherical liquid-filled flask

By R. I. NIGMATULIN<sup>1</sup>, I. SH. AKHATOV<sup>1</sup>,  
N. K. VAKHITOVA<sup>1</sup> AND R. T. LAHEY, JR<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Tyumen Institute of Mechanics of Multiphase Systems (TIMMS), Ufa-Bashkortostan Branch of  
the Russian Academy of Sciences, 450000 Ufa, K. Marx 6, Russia

<sup>2</sup> Center for Multiphase Research, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12180-3590, USA

(Received 17 July 1998 and in revised form 25 January 2000)

A spherically-symmetric problem is considered in which a small gas bubble at the centre of a spherical flask filled with a compressible liquid is excited by small radial displacements of the flask wall. The bubble may be compressed, expanded and made to undergo periodic radial oscillations. Two asymptotic solutions have been found for the low-Mach-number stage. The first one is an asymptotic solution for the field far from the bubble, and it corresponds to the linear wave equation. The second one is an asymptotic solution for the field near the bubble, which corresponds to the Rayleigh–Plesset equation for an incompressible fluid. For the analytical solution of the low-Mach-number regime, matching of these asymptotic solutions is done, yielding a generalization of the Rayleigh–Plesset equation. This generalization takes into account liquid compressibility and includes ordinary differential equations (one of which is similar to the well-known Herring equation) and a difference equation with both lagging and leading time. These asymptotic solutions are used as boundary conditions for bubble implosion using numerical codes which are based on partial differential conservation equations. Both inverse and direct problems are considered in this study. The inverse problem is when the bubble radial motion is given and the evolution of the flask wall pressure and velocity is to be calculated. The inverse solution is important if one is to achieve superhigh gas temperatures using non-periodic forcing (Nigmatulin *et al.* 1996). In contrast, the direct problem is when the evolution of the flask wall pressure or velocity is given, and one wants to calculate the evolution of the bubble radius. Linear and nonlinear periodic bubble oscillations are analysed analytically. Nonlinear resonant and near-resonant periodic solutions for the bubble non-harmonic oscillations, which are excited by harmonic pressure oscillations on the flask wall, are obtained. The applicability of this approach bubble oscillations in experiments on single-bubble sonoluminescence is discussed.

---

### 1. Introduction

Let us consider the spherically-symmetric radial flow of a compressible liquid in a spherical flask which has a small spherical gas bubble located at the centre (figure 1). The instantaneous radius of the flask is  $R(t)$  and that of the bubble is  $a(t)$ . Let us assume that the bubble is very small:

$$a \ll R. \quad (1.1)$$

We further assume that the flask wall is undergoing small-amplitude high-frequency

48 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

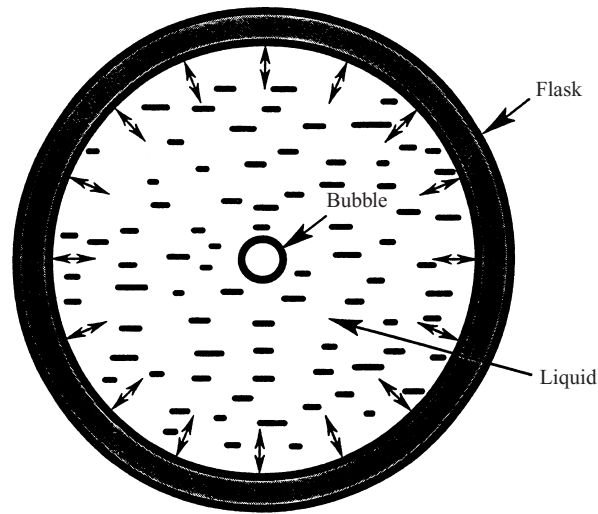


FIGURE 1. Schematic of the spherically-symmetric problem of an oscillating gas bubble in a liquid-filled flask.

spherically-symmetric displacements,  $\delta$ , where

$$\delta(t, R) \ll R(t). \quad (1.2)$$

If the pressure disturbances are not large enough to appreciably change the density of the liquid and the wavelength of the pressure wave in the liquid,  $\lambda$ , is much larger than the bubble's radius  $a$ , then for the mathematical modelling of the process one may use the approximation of an incompressible liquid, for which the momentum equation becomes the well-known Rayleigh–Plesset equation (Rayleigh 1917; Knapp, Dayly & Hammitt 1970; Nigmatulin 1991):

$$a \frac{dw_a}{dt} + \frac{3}{2} w_a^2 = \frac{p_a - p_\infty}{\rho}, \quad w_a = \frac{da}{dt}, \quad p_a = p_g(a) - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\mu w_a}{a}, \quad (1.3a-c)$$

where  $\rho, \mu, \sigma$  are the density, viscosity and surface tension of the liquid, respectively,  $w_a$  and  $p_a$  are the radial velocity and the pressure of the liquid on the bubble's interface,  $p_g$  is the pressure of the gas in the bubble, and  $p_\infty$  is the pressure of the liquid far from the bubble.

Previously the influence of liquid compressibility on the volume oscillations of a gas bubble was considered taking into account acoustic radiation damping (Herring 1941; see also Knapp *et al.* 1970; Nigmatulin 1991), which leads to the well-known approximate equation

$$\left(1 - \alpha_1 \frac{w_a}{C}\right) a \frac{dw_a}{dt} + \frac{3}{2} \left(1 - \alpha_2 \frac{w_a}{C}\right) w_a^2 = \left(1 + \alpha_3 \frac{w_a}{C}\right) \frac{p_a - p_\infty}{\rho} + \frac{a}{\rho C} \frac{d(p_a - p_\infty)}{dt}. \quad (1.4)$$

This equation looks like the Rayleigh–Plesset equation but it has additional terms:  $(a/\rho C)d(p_a - p_\infty)/dt$  and  $w_a/C$ , where  $C$  is the sound speed in the liquid, and  $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$  are the coefficients ( $\alpha_i \sim 1$ ).

A systematic theory has been presented by Prosperetti & Lezzi (1986) and Lezzi & Prosperetti (1987) for the radial motion of a spherical bubble in an infinite weakly compressible liquid. A whole family of equations for bubble oscillations has been obtained including (1.4) and other authors' equations as specific cases. All these

equations are shown to be equivalent as they have the same order of accuracy for Mach number,  $M = w_a/C$ . In deriving these equations, the assumption was made that bubble oscillations did not affect the outer acoustic field pressure at infinity. Indeed, the fact that the fluid is unbounded permits one to consider the problem of bubble oscillations separately from the acoustic problem.

The present paper deals with the problem of the oscillations of a gas bubble in a liquid-filled flask of finite size, in which the flask wall is used to excite the liquid. As shown, the problem may be reduced to an equation for the evolution of bubble radius which is similar to the Herring equation. However, instead of the pressure far from the bubble,  $p_\infty$ , another pressure,  $p_I$ , appears, which is the incident pressure. Significantly, the incident pressure differs both from the pressure at local infinity,  $p_\infty$ , and from the pressure on the flask wall,  $p_R$ . In fact, it takes into account interacting waves and must be calculated using a difference differential equation including the bubble radius,  $a(t)$ , and the pressure on the flask,  $p_R(t)$ .

## 2. Problem formulation

The posing of the problem for the spherically-symmetric radial flow (i.e. a radial velocity field  $w(t, r)$ ) of a compressible liquid around a spherical bubble includes the differential equations of mass and momentum, the barotropic equation of state for pressure  $p$  (which only depends on liquid density  $\rho$ ), the boundary conditions on the bubble's interface ( $r = a$ ) and on the wall of the flask ( $r = R$ ), and the initial conditions at  $t = 0$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial r} + \frac{2\rho w}{r} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho w \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (2.2)$$

$$p = p(\rho); \quad (2.3)$$

$$r = R: \quad p = p_R(t) \quad \text{or} \quad w = w_R(t); \quad (2.4)$$

$$r = a: \quad p = p_a, \quad w = w_a \quad \left( p_a = p_g(a) - \frac{2\sigma}{a} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial r}, \quad w_a = \frac{da}{dt} \equiv a' \right); \quad (2.5)$$

$$t = 0: \quad a = a_0, \quad a' = w_0. \quad (2.6)$$

The boundary condition at  $r = R$  corresponds to interaction with some body (e.g. a piezoelectric transducer) contacting with the wall of the flask and  $p_R(t)$  or  $w_R(t)$  must be given.

Below it is shown that the space between the bubble's interface and the internal surface of the flask consists of three zones:

(1) The far field, or external region, where weak compressibility of the liquid is essential but convective displacements of the liquid,  $\delta(t, r)$ , are small ( $\delta \ll r$ ), and the nonlinear convective terms in the mass and momentum conservation equations are negligibly small. In this zone, the motion of the liquid has an acoustic wave character with finite speed of disturbance propagation determined by a constant sound speed at the initial state.

(2) The near field of the bubble, or internal region, where the liquid may be considered incompressible and motion occurs only because of compression and expansion of the bubble, and nonlinear inertia forces, because of the convective accelerations, are essential.

50 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

(3) An intermediate zone where both the liquid compressibility and nonlinear inertia forces, because of the convective accelerations, are essential.

In the first two zones it is possible to obtain asymptotic analytical solutions.

### 3. External asymptotic solution far from the bubble

In the external zone far from the bubble ( $r^2 \gg a^2$ ) convective derivatives of density and velocity are small.

$$w \frac{\partial \rho}{\partial r} \ll \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad w \frac{\partial w}{\partial r} \ll \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (3.1)$$

which follows from the estimations

$$w \frac{\partial \rho}{\partial r} \sim \frac{w \Delta \rho}{\lambda_R}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \sim \frac{\Delta \rho}{t_R}, \quad w \frac{\partial w}{\partial r} \sim \frac{w^2}{\lambda_R}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \sim \frac{w}{t_R} \quad (3.2)$$

$$\left( w \sim \frac{w_R R^2}{r^2}, \quad \lambda_R = C t_R \right).$$

Here  $\lambda_R$  and  $t_R$  are the length and the period of the wave disturbance in the liquid in the external zone, and  $w_R$  is a characteristic velocity of the liquid on the flask wall. We note that  $t_R$  is the characteristic period of the oscillations of the flask. The ratio of the nonlinear convective and time derivatives is proportional to the ratio of the flask displacement ( $w_R t_R$ ) to the length of the flask wave ( $\lambda_R$ ), or the characteristic Mach number,  $M_R$ , of flask motion:

$$w \frac{\partial \rho / \partial r}{\partial \rho / \partial t} \sim w \frac{\partial w / \partial r}{\partial w / \partial t} \sim \frac{w t_R}{\lambda_R} \sim \frac{R^2 w_R t_R}{r^2 \lambda_R} = \frac{R^2 w_R}{r^2 C} = \frac{R^2}{r^2} M_R \ll 1, \quad (3.3)$$

which is supposed to be small for  $r \sim R$  (i.e. we study the low-Mach-number regime for small displacements of the flask). Thus one may neglect the nonlinear convective terms in the momentum and mass conservation equations, (2.1)–(2.3), compared with the temporal acceleration terms, and these equations for velocity and pressure in the ‘external’ field (i.e.  $r \gg a$ ,  $w \approx w_{ex}$ ,  $p \approx p_{ex}$ ) reduce to the following linear acoustic equations:

$$\frac{\partial^2 \varphi_{ex}}{\partial t^2} = C^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial r} \right), \quad C^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0, \quad p_{ex} = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial t}, \quad w_{ex} = \frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial r}. \quad (3.4)$$

Here density,  $\rho$ , and sound speed,  $C$ , correspond to an initial state of rest.

The solution to the equation (3.4) is well-known and thus the external asymptotic solution for the velocity potential can be expressed as

$$\varphi_{ex} = \frac{1}{r} \left[ \psi_1 \left( t - \frac{r}{C} \right) + \psi_2 \left( t + \frac{r}{C} \right) \right], \quad (3.5)$$

where  $\psi_2$  and  $\psi_1$  characterize the incident and the reflected acoustic waves, respectively.

### 4. Internal asymptotic solution near the bubble

The internal zone near the bubble has a radius,  $r = O(a)$ , which is small compared to the radius of the flask  $R$ . In this zone, during the characteristic time of bubble

*Oscillations of a gas bubble in a spherical flask*

51

compression,  $t_a$ , the displacements of the liquid are about one bubble radius,  $w_a t_a \sim a$ . For low Mach numbers near the bubble,  $M_a \equiv w_a/C \ll 1$ , this assumption corresponds to long waves near the bubble:  $\lambda_a \sim C t_a \gg a$ . In such a case, if the relative change of the liquid density near the bubble is assumed to be small, then in the internal zone ( $w = w_{in}$ ,  $\varphi = \varphi_{in}$ ) the asymptotic solution of an incompressible fluid is valid (see also Landau & Lifshitz 1959; Feynman, Leighton & Sands 1964), thus equation (2.1) yields

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} \right) = 0, \quad w_{in} = \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r}. \quad (4.1)$$

The solution of this equation together with the boundary conditions on the bubble interface ( $r = a$ :  $w = w_a \equiv a'$ ) is

$$\varphi_{in} = -\frac{a'a^2}{r}, \quad w_{in} = \frac{a'a^2}{r^2}. \quad (4.2)$$

The Bernoulli integral in this case includes a component corresponding to a nonlinear convective inertia force ( $w^2/2$ ), and has the form

$$\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial t} + \frac{w_{in}^2}{2} + \frac{p_{in}}{\rho} = F_{in}(t). \quad (4.3)$$

This equation in conjunction with equation (4.2) and the boundary condition (2.5) on the bubble interface ( $r = a$ ) leads to the Rayleigh–Plesset equation (1.3), where  $p_\infty$  is the pressure at ‘intermediate infinity’ ( $r = r_\infty$ ), which is far from the bubble, and far from the surface of the flask, i.e.  $a \ll r_\infty \ll R$ . Using this integral, one can find the asymptotic solution for the pressure distribution in the internal zone:

$$p_{in} = p_a - \rho(aa'' + \frac{3}{2}(a')^2) + \frac{\rho}{r}(a^2a')' - \frac{\rho}{2} \frac{a^4(a')^2}{r^4}. \quad (4.4)$$

This result will be useful in the next section for the matching procedure.

## 5. Matching of the asymptotic solutions

To obtain an equation for the radial motion of gas bubbles for a given excitation on the flask (2.4), and taking into account liquid compressibility, it is necessary that the asymptotic solutions in the external and internal zones be matched in the intermediate zone. For the internal asymptotic solution the intermediate zone is at infinity ( $r \rightarrow \infty$ ), but for the external asymptotic solutions the intermediate zone is near the centre of the flask ( $r \rightarrow 0$ ). As a matching condition in the intermediate zone the equality of volumetric flow  $4\pi r^2 w$  and pressure  $p$  was imposed for the internal and external asymptotic solutions. Thus the radial coordinate in the asymptotic solution for the internal zone ( $r \sim a$ ) should tend to infinity ( $r \rightarrow \infty$ ) and in the asymptotic solution for the external zone ( $r \sim R$ ) it should tend to zero ( $r \rightarrow 0$ ):

$$4\pi r^2 w_{in} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 4\pi r^2 w_{ex} \Big|_{r \rightarrow 0}, \quad p_{in} \Big|_{r \rightarrow \infty} = p_{ex} \Big|_{r \rightarrow 0}. \quad (5.1)$$

Taking into account that the volumetric flow for an incompressible fluid depends only on time:

$$4\pi r^2 w_{in} = 4\pi r^2 \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt} \equiv 4\pi Q(t) \quad (Q \equiv a^2 a'), \quad (5.2)$$

52 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

we may rewrite the first equation in (5.1) as

$$r^2 \frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow 0} = a^2 \frac{da}{dt}. \quad (5.3)$$

Thus,

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow 0} &= - \left[ \psi_1 \left( t - \frac{r}{C} \right) + \psi_2 \left( t + \frac{r}{C} \right) \right] + \frac{r}{C} \left[ -\psi_1' \left( t - \frac{r}{C} \right) + \psi_2' \left( t + \frac{r}{C} \right) \right] \Big|_{r \rightarrow 0} \\ &\rightarrow -\psi_1(t) - \psi_2(t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

where the prime corresponds to the derivative. Then from (5.3), (5.4) the relation between the incident and reflected waves is

$$\psi_1 = -\psi_2 - a^2 a'. \quad (5.5)$$

Thus from (3.5), (4.2) one has the asymptotic solution for the velocity potential in the external and internal zones as

$$\varphi_{ex} = \frac{1}{r} \left[ \psi_2 \left( t + \frac{r}{C} \right) - \psi_2 \left( t - \frac{r}{C} \right) - Q \left( t - \frac{r}{C} \right) \right], \quad \varphi_{in} = -\frac{Q(t)}{r}. \quad (5.6)$$

Using (3.4), (5.6), we find the asymptotic solutions for pressure distributions in the external zone:

$$p_{ex} = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial t} = p_0 - \frac{\rho}{r} \left[ \psi_2' \left( t + \frac{r}{C} \right) - \psi_2' \left( t - \frac{r}{C} \right) - Q' \left( t - \frac{r}{C} \right) \right]. \quad (5.7)$$

Substitution of (4.4) and (5.7) into the second matching condition in (5.1) leads to the long wave approximation of the equation for bubble oscillations in a compressible liquid:

$$aa'' + \frac{3}{2}a^2 = \frac{p_a - p_0}{\rho} + \frac{1}{C} [2\psi_2''(t) + Q''(t)]. \quad (5.8)$$

Here the term  $Q''(t)/C$  is responsible for the influence of bubble oscillations on the reflected pressure wave.

The pressure on the flask wall ( $r = R$ ) may be expressed using the external asymptotic solution (5.7):

$$p_R(t) = p_0 - \frac{\rho}{R} \left[ \psi_2' \left( t + \frac{R}{C} \right) - \psi_2' \left( t - \frac{R}{C} \right) - Q' \left( t - \frac{R}{C} \right) \right]. \quad (5.9)$$

From equations (1.3) and (5.8) the expression for the pressure,  $p_\infty$ , at the internal 'infinity' (i.e. far from the bubble, but near the centre compared with the radius of the flask) is

$$p_\infty = p_0 - \frac{\rho}{C} [2\psi_2''(t) + Q''(t)]. \quad (5.10)$$

Equations (5.8) and (5.9) are the expressions sought in the matching procedure.

## 6. The system of equations for bubble motion

It is important that (5.8) depends on  $Q''$ , having the third derivative of the bubble radius,  $a'''(t)$ . The dependence of the solution for bubble radius,  $a(t)$ , on the third derivative,  $a'''(t)$ , was noted previously by Prosperetti & Lezzi (1986), and Prosperetti (1994). However, for the low-Mach-number, or long-wave, approximation one may use



Oscillations of a gas bubble in a spherical flask

53

the simple asymptotic solution without the third derivative. Indeed, the components of (5.8) may be estimated as

$$aa'' \sim (a')^2 \sim \frac{a^2}{t_a^2}, \quad \frac{1}{C}Q''(t) \equiv \frac{1}{C}(a^2a')'' \sim \frac{a^3}{t_a^3 C}, \quad (6.1)$$

and their ratio is determined by a small parameter for the case of the assumed long-wave, or low-Mach-number regime in the internal zone (see the discussion in the §4):

$$\frac{Q''/C}{aa''} \sim \frac{Q''/C}{Q'/a} \sim \frac{a}{t_a C} \sim \frac{a}{\lambda_a} \sim \frac{a'}{C} \sim \varepsilon_a \ll 1. \quad (6.2)$$

Taking into account

$$\frac{Q'}{a} \equiv aa'' + 2a'^2, \quad aa'' + \frac{3}{2}a'^2 \equiv \frac{Q'}{a} - \frac{1}{2}a'^2, \quad (6.3)$$

we may rewrite (5.8), introducing the incident (wave) pressure  $p_I$ , as

$$\frac{Q'}{a} - \frac{a'^2}{2} = \frac{p_a - p_I}{\rho} + \frac{Q''}{C}, \quad p_I(t) = p_0 - \frac{2\rho}{C}\psi_2''. \quad (6.4)$$

Note that the so-called incident pressure  $p_I$  is the regular (i.e. non-singular) part of the liquid pressure (5.9), extrapolated to the centre of the bubble.

Suppose that the term  $Q''(t)/C$  is small in (6.2). This expression may then be simplified:

$$Q' = a \left[ \frac{a'^2}{2} + \frac{p_a - p_I}{\rho} \right] (1 + O(\varepsilon_a)). \quad (6.5)$$

Differentiating with respect to time,  $t$ , one obtains the long-wave and low-Mach-number approximation for  $Q''(t)/C$ :

$$\frac{Q''}{C}(1 + O(\varepsilon_a)) = \left[ aa'' + \frac{a'^2}{2} + \frac{p_a - p_I}{\rho_0} \right] \frac{a'}{C} + \frac{a}{\rho C} \frac{d}{dt} [p_a - p_I]. \quad (6.6)$$

Substituting (6.6) into (5.8) and neglecting the values of  $O(\varepsilon_a^2)$  we obtain

$$\left(1 - \frac{a'}{C}\right) aa'' + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{a'}{3C}\right) a'^2 = \left(1 + \frac{a'}{C}\right) \frac{p_a - p_I}{\rho} + \frac{a}{\rho C} \frac{d}{dt} [p_a - p_I]. \quad (6.7)$$

For small Mach number ( $M_a \equiv a'/C$ ) the correction terms in the square brackets of this equation may be neglected.

Finally, the evolution of the radius of the spherical bubble in the centre of a spherical flask filled with a viscous, weakly compressible, liquid excited by radial displacements of the flask in the long-wave regime, for low Mach number, is described by the following system of equations resulting from (5.9), (6.4) and (6.7):

$$aa'' + \frac{3}{2}a'^2 = \frac{p_a - p_I}{\rho} + \frac{a}{\rho C} \frac{d}{dt} [p_a - p_I], \quad (6.8)$$

$$p_R(t) = p_0 - \frac{\rho}{R} \left[ \psi_2' \left( t + \frac{R}{C} \right) - \psi_2' \left( t - \frac{R}{C} \right) - Q' \left( t - \frac{R}{C} \right) \right], \quad (6.9)$$

$$p_I(t) \equiv p_0 - \frac{2\rho}{C}\psi_2'', \quad Q(t) \equiv a^2 a'. \quad (6.10)$$

This system of coupled ordinary difference-differential equations (6.8) and (6.9) has both lagging (retarding) and leading potentials. It is closed by specifying the density

54 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

$\rho$ , and sound speed  $C$  of the liquid. The value of the liquid pressure on the bubble's interface,  $p_a$ , is calculated from the boundary condition on the bubble's interface ( $r = a$ ), where it is necessary to use the surface tension  $\sigma$  and viscosity  $\mu$  of the liquid (see (1.3c)) and an equation of state for the gas bubble  $p_g(a)$  (in particular, the polytropic law with an exponent  $\kappa$ ):

$$p_g = (p_0 + 2/a_0) (a/a_0)^{-3\kappa} \quad (1 < \kappa < \gamma), \quad (6.11)$$

where  $\gamma$  is the adiabatic exponent of the gas.

One of the boundary conditions (2.4) on the flask wall ( $r = R$ ) determines the external excitation of the system. The initial conditions are determined by (2.6).

Notice that (6.8) is similar in form to the Herring equation (1.4). However in (6.8) instead of the liquid pressure at infinity,  $p_\infty$ , the incident pressure,  $p_I$ , appears.

It is important to note that the incident pressure,  $p_I$ , is not the same as  $p_\infty$ , nor the flask wall pressure  $p_R(t)$ . The incident pressure  $p_I$ , given by (6.10), takes into account the convergent waves (given by the function  $\psi_2(t)$ ) coming to the bubble from the flask.

One might suppose that the incident pressure  $p_I$  corresponds to the pressure of the liquid at the centre of the flask when there is no bubble. However, this is true only for the trivial case when the incident pressure is constant ( $p_I = \text{const}$ ), i.e. for free oscillations. For forced oscillations the incident pressure  $p_I$  is influenced and compensated by bubble expansion or compression (note the  $Q'$  term in (6.9)). In particular, for the periodic flask resonance regime the liquid pressure at the centre of the flask without a bubble may be infinite; however  $p_I$  is always finite (see §9). It is important to note that the incident pressure  $p_I$  is calculated only after solving the coupled problem, i.e. equations (6.8)–(6.10), for interacting flask and bubble oscillations.

## 7. Inverse problem

Interestingly, using equations (6.8)–(6.10), it is easy to solve the inverse problem; that is knowing the evolution of the bubble radius  $a(t)$  to calculate the required evolution of the pressure on the flask wall  $p_R(t)$ . The inverse solution is important if one is to achieve superhigh gas temperatures using non-periodic forcing (Nigmatulin *et al.* 1996). In order to obtain the inverse solution it is necessary to first calculate the incident pressure  $p_I(t)$  using the linear (relatively to  $p_I$ ) differential equation (6.8):

$$\frac{dp_I}{dt} - \frac{C}{a} p_I = \frac{d}{dt} p_a + \frac{C}{a} p_a - \rho \frac{C}{a} (aa'' + \frac{3}{2} a'^2). \quad (7.1)$$

Then for the forcing function  $\psi_2$ , there is an integral, following from (6.12):

$$\psi_2'(t) = \frac{C}{2\rho} \int_0^t [p_0 - p_I(t')] dt', \quad (7.2)$$

and finally, knowing  $\psi_2'(t)$  and  $Q'(t) \equiv a^2 a'' + 2(a')^2$ , one may calculate the pressure on the flask wall  $p_R(t)$  using the difference equation (6.9).

The 'semi-inverse' problem is when, knowing the incident pressure  $p_I(t)$ , the evolution of the bubble radius  $a(t)$  and  $Q'(t)$  are calculated solving the differential equation (6.10). Then the evolution of the pressure distribution,  $p_{ex}(t, r)$ , in the external field, in particular the evolution of the flask pressure,  $p_R(t)$  at  $r = R$ , is calculated using (7.2) and (5.7):

$$p_{ex}(t, r) = p_0 + \frac{C}{2r} \int_{t-r/c}^{t+r/c} [p_I(t') - p_0] dt' + \frac{\rho}{r} Q'(t - r/c). \quad (7.3)$$

Oscillations of a gas bubble in a spherical flask

55

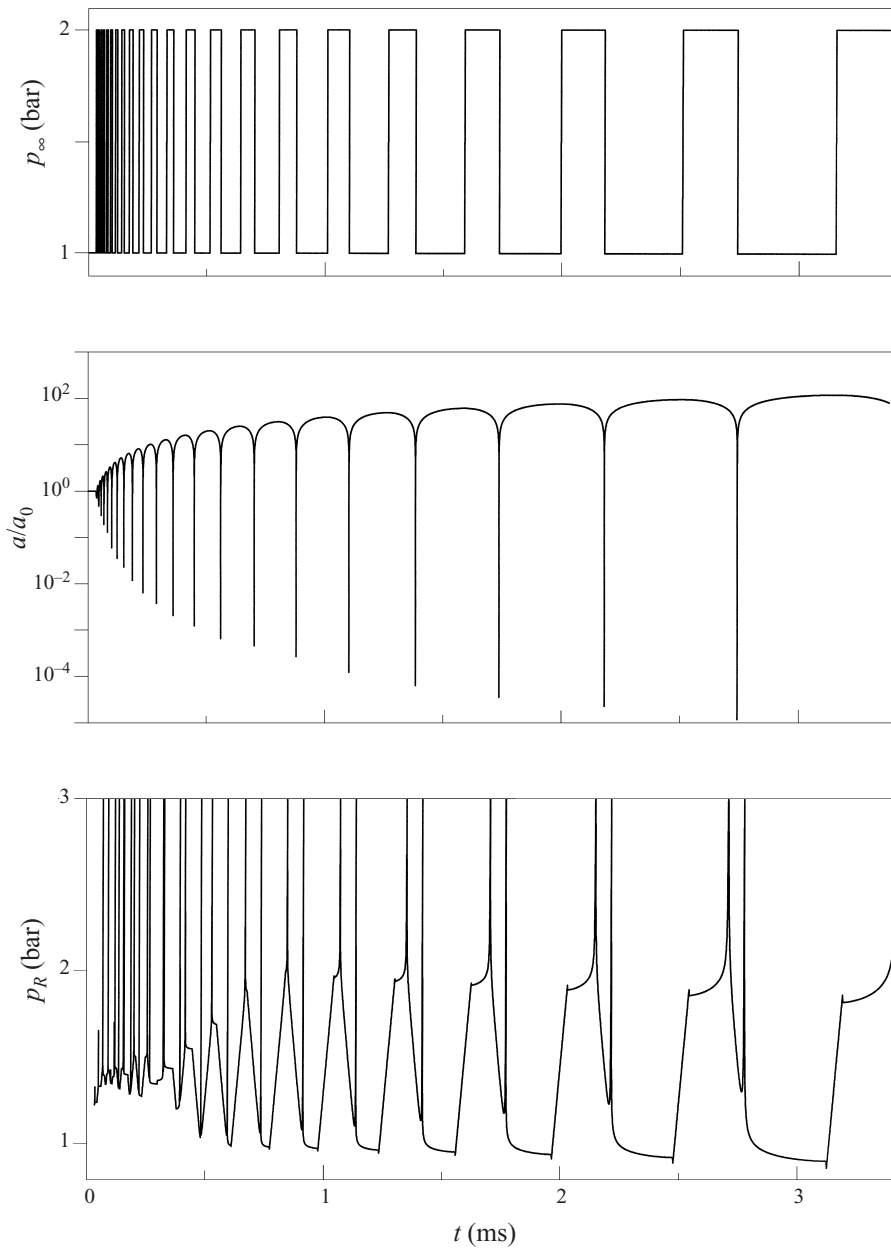


FIGURE 2. ‘Basketball dribbling’ regime exciting of a gas bubble ( $a_0 = 35 \mu\text{m}$ ) in water ( $p_0 = 1$  bar,  $T_0 = 300$  K) in a spherical flask ( $R = 5$  cm) for relatively small forcing compression pressure ( $p_\infty^{\text{max}} = 2$  bar).

Similarly, the evolution of the pressure in the internal field is calculated using (4.4):

$$p_{in}(t, r) = p_I(t) + \frac{a}{C} \frac{dp_I(t)}{dt} - \frac{a}{C} \frac{dp_a}{dt} + \frac{\rho}{r} (a^2 a')' - \frac{\rho}{2} \frac{a^4 (a')^2}{r^4}. \quad (7.4)$$

The inverse problem solution was used for calculating the flask’s wall pressure evolution,  $p_R(t)$ , required to give a coordinated non-periodic resonant ‘basketball dribbling regime’ (Nigmatulin *et al.* 1995, 1996; Nigmatulin & Lahey 1995). This

56 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

method of excitation allows the system kinetic energy to be progressively increased by moderate-amplitude forcing of the flask pressure  $\Delta p_R$  (see figure 2) due to coordination between the bubble radius evolution  $a(t)$ , evolution of pressure at local infinity,  $p_\infty(t)$ , and pressure at the flask wall,  $p_R(t)$ .

### 8. The direct problem

The direct problem is as follows: knowing the evolution of the flask wall pressure  $p_R(t)$  or flask wall velocity  $w_R(t)$ , to calculate the evolution of the bubble radius  $a(t)$ . In the general case the solution of the direct problem may be obtained by the numerical integration of the system of partial differential equations (2.1)–(2.5). The direct numerical simulation of the process of forming the periodic regime for very small bubbles ( $a \ll R$ ) often requires an enormous quantity of computer time.

For the case of long-wave disturbances and weak compressibility of the liquid, we may use a much more ‘economical’ analytical approach taking into account the internal asymptotic solution near the bubble and external asymptotic solution far from the bubble.

An analytical approach to the direct problem follows after differentiating with respect to time the equation for the flask wall pressure (6.9):

$$\frac{dp_R}{dt} = -\frac{\rho}{R} \left[ \psi_2'' \left( t + \frac{R}{C} \right) - \psi_2'' \left( t - \frac{R}{C} \right) - Q'' \left( t - \frac{R}{C} \right) \right], \quad (8.1)$$

Taking into account that (see (6.10))

$$-\psi_2''(t) = \frac{C}{2\rho} [p_I(t) - p_0], \quad (8.2)$$

one obtains a recursion formula for calculating the incident pressure  $p_I$ :

$$p_I \left( t + \frac{R}{C} \right) = p_I \left( t - \frac{R}{C} \right) + \frac{2R}{C} p_R'(t) - \frac{2\rho}{C} Q'' \left( t - \frac{R}{C} \right). \quad (8.3)$$

This equation allows one to calculate the values of the incident pressure  $p_I$  at a later time ( $t + R/C$ ) by using the same pressure  $p_I$ , the derivative of the flask pressure  $p_R'(t)$ , and the second derivative of  $Q$ , at earlier times (i.e.  $t$  and  $t - R/C$ ). As a result if one knows the evolution of the bubble radius during the time period  $\Delta t = R/C$  (in particular it may be the state of rest before excitation began) then the last recurrent equation determines the incident pressure  $p_I$  for any later time until the flask pressure is given.

Using simplified expression (6.6) for  $Q''$ , for the long-wave and low-Mach-number approximation, one may write the recurrent equation for the incident pressure as

$$p_I \left( t + \frac{R}{C} \right) = p_A + p_B, \quad (8.4a)$$

$$p_A = p_I \left( t - \frac{R}{C} \right) + \frac{2R}{C} p_R'(t), \quad (8.4b)$$

$$p_B = -2 \left\{ \left[ \rho \left( aa'' + \frac{a^2}{2} \right) + (p_a(a, a') - p_I) \right] \frac{a'}{C} + \frac{a}{C} \frac{d}{dt} [p_a(a, a') - p_I] \right\} \Big|_{t-R/C}. \quad (8.4c)$$

Thus the incident pressure consists of two components. The first,  $p_A$ , is the pressure corresponding to an acoustical process in the flask filled with a liquid but without

Oscillations of a gas bubble in a spherical flask

57

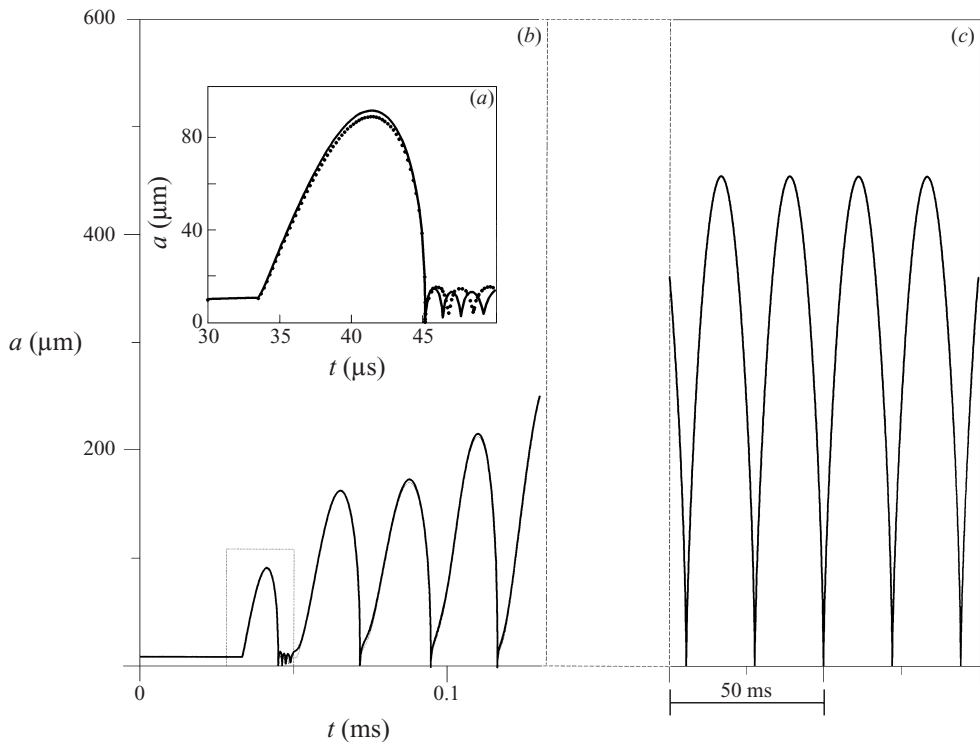


FIGURE 3. Excitation of adiabatic ( $\kappa = \gamma$ ) gas bubble ( $a_0 = 10 \mu\text{m}$ ) oscillations in a flask ( $R = 5 \text{ cm}$ ) filled with water ( $p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_0 = 300 \text{ K}$ ) when the flask wall produces sinusoidal pressure oscillations of amplitude  $\Delta p_R^o = 0.25 \text{ bar}$ , and frequency,  $f = f_3 = 45 \text{ kHz}$ . (a) Comparison with the numerical solution of Moss *et al.* (1994) given by the dotted line. (b) The first few periods of bubble oscillations. (c) The periodic regime which corresponds to the resonant case ( $k = 3$  or  $f = f_3$ ).

a bubble. The second,  $p_B$ , is the pressure due to reaction on the flask's wall due to bubble oscillations.

In Moss *et al.* (1994) a numerical code for partial differential conservation equations was used to calculate the bubble's behaviour not only for the bubble implosion stage but for the long-wavelength and low-Mach-number stage as well. In this numerical analysis the asymptotic solution of the incompressible liquid near the bubble was not used. The direct problem was solved for a sinusoidal pressure change on the flask:

$$p_R(t) = \begin{cases} p_0 & \text{for } t \leq 0 \\ p_0 - \Delta p_R^o \sin \omega t & \text{for } t > 0, \end{cases} \quad (8.5)$$

where  $\Delta p_R^o$  is the amplitude of pressure on the flask wall,  $\omega = 2\pi f$  is angular frequency. The bubble radius  $a(t)$  was calculated, but only for the first oscillation and not for the periodic regime, which takes place only after many oscillations have washed out the initial condition. Significantly, the periodic regime is what is normally measured in experiments.

In figure 3 the results of our calculations are presented (solid line). The first oscillation agrees with the Moss *et al.* (1994) calculation (dotted line). One can see that the second oscillation differs essentially from the first, the third differs from the second and so on. For the isothermal behaviour of the bubble, radius oscillations practically coincide with those for the adiabatic behaviour, with the exception of the moments of maximum compression: for the isothermal behaviour the depth of the

58 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

collapse is essentially less. And only after many oscillations ( $t \gg \omega^{-1}$ ) does a periodic regime take place. This is connected with the inertia of the liquid in the flask,  $\sim \rho R^3$ . In fact, it is the mass of the liquid that delays beginning the periodic regime of pressure at local infinity,  $p_\infty$ . The delay of the periodic regime of bubble oscillations after the beginning the periodic regime for  $p_\infty$  is much smaller because it determined by the virtual mass of the liquid around the bubble,  $\sim \rho a^3 \ll \rho R^3$ .

It follows that the most interesting solution should be for the periodic regime. However, a direct numerical solution of the initial value problem for the periodic regime is very time consuming.

It should be noted also that heat transfer phenomena in the bubble are of great importance. The detailed analysis of the temperature effects in the bubble will be presented in a separate paper (Nigmatulin, Akhatov & Vakhitova 1999a; Nigmatulin *et al.* 1999b). Here we provide some estimations to decide if it is possible to use an isothermal or adiabatic approximation as the equation of state for the gas bubble.

The gas temperature on the bubble's interface is practically constant and equal to the temperature of the liquid,  $T_0$ . There is a thermal boundary layer near the interface where the gas temperature varies from  $T_0$  on the interface to the bulk temperature of the gas  $T$ , which is varying with time because of the compression or expansion of the gas bubble.

A well-known estimation of the transient thermal boundary layer thickness in the bubble is given by

$$\delta r^{(T)} \approx \pi \sqrt{v_g^{(T)} \delta t}, \quad v_g^{(T)} = \lambda_g / (\rho_g c_p). \quad (8.6)$$

Here  $v_g^{(T)}$ ,  $\lambda_g$ ,  $\rho_g$ ,  $c_p$  are temperature diffusivity, heat conduction, density and heat capacity of the bubble gas, respectively, and  $\delta t$  is the characteristic time scale of the process. The heat conduction coefficient depends on the gas temperature (Vargaftik 1972) as

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_{g0}} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^\alpha \quad (\alpha \approx 0.8). \quad (8.7)$$

Taking into account (6.13) and that

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(\kappa-1)} \quad (1 < \kappa < \gamma), \quad \frac{\rho_g}{\rho_{g0}} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (8.8)$$

and neglecting by variation of heat capacity ( $c_p \sim \text{const}$ ) one can obtain the following estimation for the temperature diffusivity coefficient:

$$\frac{v_g^{(T)}}{v_{g0}^{(T)}} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{3(1.8-0.8\kappa)}. \quad (8.9)$$

Let us estimate the relative boundary layer thickness  $\delta r^{(T)}/a$  for the bubble with equilibrium size  $a_0 \sim 10^{-5}$  m oscillating in water ( $v_{g0}^{(T)} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) with period  $t_\omega \sim 10^{-5}$  s. For the low-Mach-number stage ( $\delta t \sim t_\omega \sim 10^{-5}$  s,  $a \sim a_0 \sim 10^{-5}$  m,  $v_g^{(T)} \sim 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) the relative boundary layer thickness is  $\delta r^{(T)}/a \sim 1$  and therefore the best approximation is an isothermal one ( $\kappa \approx 1$ ).

For the same bubble ( $a_0 \sim 10^{-5}$  m) during an implosion, i.e. the large-Mach-number stage,  $\delta t \sim 10^{-8}$  s,  $a \sim 10^{-6}$  m, the relative boundary layer thickness is  $\delta r^{(T)}/a < 0.05$  and therefore the adiabatic approximation ( $\kappa \approx \gamma$ ) may be used.

### 9. Linear harmonic forced oscillations

*A priori* it is clear that the problem has two characteristic frequencies. The first is the circular-flask frequency,  $\omega_R$ , determined by the time,  $t_R = 2R/C$ , for acoustic wave propagation over the distance  $2R$  from the flask wall to its centre and back; the second is the circular-bubble free oscillation frequency (i.e. the Minnaert frequency),  $\omega_a$ :

$$\omega_R = 2\pi f_R = \frac{2\pi}{t_R} = \frac{\pi C}{R}, \quad \omega_a = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{3\kappa_\sigma p_0}{\rho}}, \quad \kappa_\sigma = \kappa + \frac{3\kappa - 1}{3} \frac{2\sigma}{a_0 p_0}. \quad (9.1)$$

Let us consider the small oscillations of a bubble forced by flask oscillations. Introducing small disturbances:

$$\Delta a = a - a_0 \ll a_0, \quad \Delta p_I = p_I - p_0 \ll p_0, \quad \Delta p_R = p_R - p_0 \ll p_0, \quad (9.2)$$

and after linearization the equations for these disturbances may be written

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta a + \omega_a(\eta_\mu + \eta_C) \frac{d}{dt} \Delta a + \omega_a^2 \Delta a = \frac{\Delta p_I}{\rho a_0} - \frac{1}{\rho C} \frac{d}{dt} \Delta p_I, \quad (9.3)$$

$$\Delta p_I \Big|_{t+R/C} = \Delta p_I \Big|_{t-R/C} + \frac{2R}{C} \frac{d}{dt} \Delta p_I \Big|_t + \frac{3\kappa_\sigma p_0}{C} \frac{d}{dt} \Delta a \Big|_{t-R/C} \quad (9.4)$$

$$\left( \eta_\mu \equiv \frac{4\mu}{\rho a_0} \sqrt{\frac{\rho}{3\kappa_\sigma p_0}}, \quad \eta_C \equiv \frac{1}{C} \sqrt{\frac{3\kappa_\sigma p_0}{\rho}} \ll 1 \right).$$

Here it was taken into account, that  $\eta_\mu \eta_C \ll 1$ .

Let us consider forced steady harmonic oscillations with a given arbitrary frequency  $\omega$ :

$$\Delta p_R/p_0 = A_{pR} e^{i\omega t}, \quad \Delta p_I/p_0 = A_{pI} e^{i\omega t}, \quad \Delta a/a_0 = A_a e^{i\omega t}, \quad (9.5)$$

where  $A_{pR}, A_{pI}, A_a$  are small relative (non-dimensional) amplitudes of the flask wall pressure, incident pressure and bubble radius, respectively. We note that the amplitude of the flask pressure should be given.

Substituting the assumed harmonic solutions (9.5) into (9.3), (9.4) we obtain the equations for the relative amplitudes:

$$A_a = -\frac{K_a}{3\kappa_\sigma} A_{pI}, \quad K_a = \frac{\omega_a^2 [1 + i(\omega a_0/C)]}{\omega_a^2 + i\omega_a(\eta_\mu + \eta_C)\omega - \omega^2}, \quad (9.6)$$

$$A_{pI} \sin\left(\frac{\omega R}{C}\right) = \left(\frac{\omega R}{C}\right) A_{pR} + 3\kappa_\sigma \left(\frac{\omega a_0}{C}\right) \exp\left(-\frac{i\omega R}{C}\right) A_a. \quad (9.7)$$

Then the response function, which is the ratio of the relative amplitude of the bubble radius,  $A_a$ , to the the relative amplitude of the forcing flask pressure,  $A_{pR}$ , may be presented as a function of the non-dimensional flask frequency,  $\bar{\omega}$ , related to the flask resonant frequency,  $\omega_R$ :

$$\frac{A_a}{A_{pR}} = -\frac{1}{3\gamma_\sigma} \frac{\pi \bar{\omega} [1 + \delta(\bar{\omega})]}{\sin \pi \bar{\omega} + \varepsilon_a \pi [1 + \delta(\bar{\omega})] \bar{\omega} \exp(-\pi \bar{\omega})}, \quad (9.8)$$

60 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

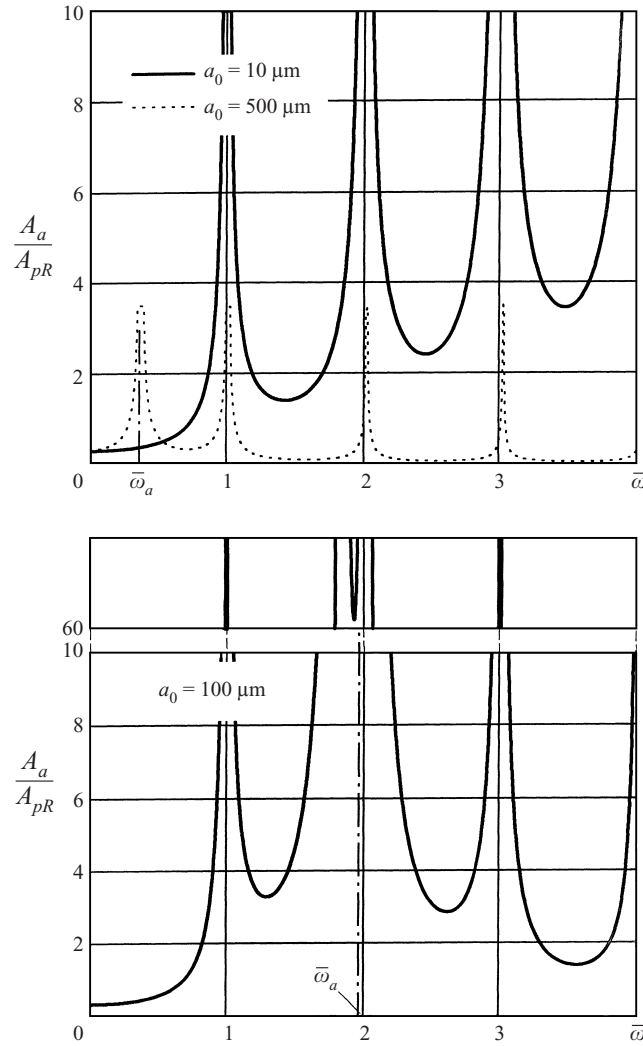


FIGURE 4. Amplitude–frequency response functions for harmonic oscillations of the isothermal ( $\kappa = 1$ ) bubble ( $a_0 = 10 \mu\text{m}$  ( $\omega_a = 2160 \text{ kHz}$ ),  $a_0 = 100 \mu\text{m}$  ( $\omega_a = 206 \text{ kHz}$ ),  $a_0 = 500 \mu\text{m}$  ( $\omega_a = 41.03 \text{ kHz}$ )) in a flask ( $R = 5 \text{ cm}$ ,  $\omega_R = \omega_1 = 94.2 \text{ kHz}$ ) filled with water ( $p_0 = 1 \text{ bar}$ ).

$$\delta(\bar{\omega}) \equiv \frac{\varepsilon_\omega^2 \bar{\omega}^2 + i[\pi\varepsilon_a - (\eta_\mu + \eta_C)\varepsilon_\omega]\bar{\omega}}{1 - \varepsilon_\omega^2 \bar{\omega}^2 + i\varepsilon_\omega - (\eta_\mu + \eta_C)\bar{\omega}},$$

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\omega}{\omega_R}, \quad \varepsilon_a \equiv \frac{a_0}{R}, \quad \varepsilon_\omega \equiv \frac{\omega_R}{\omega_a} \equiv \frac{a_0}{R} \frac{\pi C}{\sqrt{3\kappa_\sigma p_0/\rho}}.$$

Typical amplitude–frequency response functions corresponding to (9.8) are shown on figure 4 for a flask of radius  $R = 5 \text{ cm}$ , which is filled with water. The first flask resonance frequency ( $\bar{\omega} = 1$ ) corresponds to  $f_1 = 15 \text{ kHz}$  (i.e.  $\omega_1 = 94.2 \text{ kHz}$ ).

For an extremely small bubble, which is small not only compared with the flask ( $\varepsilon_a \ll 1$ ), but even  $\varepsilon_\omega$  is small, and bearing in mind that usually  $\eta_\mu < 1$ ,  $\eta_C \ll 1$ , it is easy to see that the resonance corresponding to the maximum absolute value of  $|A_a/A_{pR}|$  takes place when  $\sin(\pi\bar{\omega}) \approx 0$ , or when  $\bar{\omega} \approx 1, 2, 3, \dots$ . That is, the resonance



*Oscillations of a gas bubble in a spherical flask*

61

is associated with the flask acoustic resonance, and the bubble does not influence the value of the resonant frequencies. This means that the ratio of the time of wave propagation from the flask to the centre and back,  $2R/C$ , to the period of the flask oscillations,  $f^{-1}$ , is an integer number  $\kappa$ :

$$\frac{2R/C}{f^{-1}} = k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{or} \quad \omega = \omega_k \equiv 2\pi f_k = \frac{k\pi C}{R} \equiv k\omega_R. \quad (9.9)$$

The bubble influences the resonant frequency only when the frequency of the flask excitation is comparable with the resonant frequency of the bubble,  $\omega_a$  (see figure 4 for  $a_0 = 100$  and  $500 \mu\text{m}$ ).

It is interesting that away from the bubble resonance zone (Minnaert frequency) the smaller the bubble the higher the relative response  $|A_a/A_{pR}|$  (i.e. compare the curves for  $a_0 = 10$  and  $500 \mu\text{m}$  on figure 4). This effect may be one of the possible reasons why sonoluminescence has only been observed for very small bubbles (e.g.  $a_0 = 4$  to  $10 \mu\text{m}$ ).

It is seen that for frequencies close to the resonant frequencies the amplitude of the relative bubble radius oscillations,  $A_a$ , may be large even for small relative amplitudes of the flask pressure oscillations,  $A_{pR} \ll 1$ , because of very large values of  $|A_a/A_{pR}|$  (see figure 4). This means that for excitation frequencies close to the resonant frequencies it is necessary to use nonlinear models when analysing the non-harmonic response of the bubble radius,  $\Delta a$ , which may take place even for small sinusoidal oscillations of the pressure on the flask,  $\Delta p_R \ll p_0$ , such as occurs in experiments on bubble sonoluminescence.

To analyse the influence of the bubble oscillations on the sound field let us consider the other type of response function, which is the ratio of the relative amplitude of the incident pressure,  $A_{pI}$ , to the relative amplitude of the forcing flask pressure,  $A_{pR}$ :

$$\frac{A_{pI}}{A_{pR}} = \frac{\omega R/C}{\sin(\omega R/C) + (\omega a_0/C) \exp(-i\omega R/C) K_a}. \quad (9.10)$$

It is easy to see that, when  $a_0 \rightarrow 0$ , the influence of the bubble oscillations on the dynamics of the fluid vanishes and the response function (9.10) leads to the well-known solution that corresponds to the standing spherical acoustic wave (see Landau & Lifshitz 1959):

$$\frac{A_{pI}}{A_{pR}} = \frac{\omega R/C}{\sin(\omega R/C)}. \quad (9.11)$$

Here  $A_{pI}$  is the relative pressure amplitude in the centre of the flask without the bubble. In the case of flask resonance (see (9.9)) the pressure amplitude is infinite. However, when  $a_0 \neq 0$ , the infinite liquid pressure oscillations are compensated by the bubble oscillations (the denominator in (9.10) is never zero).

## 10. Nonlinear analysis for the resonant frequencies

For the flask resonance case, when  $2R/C = k/f_k$  or  $\omega = \omega_k \equiv k\pi C/R$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), one may write (because of periodicity with period  $t_R = 2R/C$ )

$$p_I \left( t + \frac{R}{C} \right) = p_I \left( t - \frac{R}{C} \right). \quad (10.1)$$

62 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

Then from (8.3) it follows that

$$\frac{2R}{C} \frac{d}{dt} [p_R(t)] = \frac{2\rho}{C} \frac{d^2}{dt^2} \left[ Q \left( t - \frac{R}{C} \right) \right]. \quad (10.2)$$

After integrating over time one may write

$$\frac{R}{\rho} [p_R(t) - p_0 c^{(1)}] = \frac{d}{dt} \left[ Q \left( t - \frac{R}{C} \right) \right], \quad (10.3)$$

where  $c^{(1)}$  is an arbitrary non-dimensional constant.

For the periodic regime excited by the sinusoidal oscillations of the flask wall with amplitude  $\Delta p_R^0 \equiv A_{pR} p_0$ , at resonant frequency  $\omega_k = k\pi C/R$ ,

$$p_R(t) = p_0(1 + A_{pR} \sin(\omega_k t)) \quad (10.4)$$

we have

$$\frac{d}{dt} [Q(t)] = \frac{p_0 R}{\rho} \left\{ A_{pR} \sin \left[ \omega_k \left( t + \frac{R}{C} \right) \right] + 1 - c^{(1)} \right\}. \quad (10.5)$$

Keeping in mind that  $Q(t) \equiv a^2 a' = \frac{1}{3}(a^3)'$  one may write after a double integration of (10.5)

$$\frac{a^3}{3} = \frac{R p_0 A_{pR}}{\rho \omega_k^2} \left\{ -\sin \left[ \omega_k \left( t + \frac{R}{C} \right) \right] + 1 + c^{(3)} \right\} + \frac{R p_0}{\rho} \left\{ \frac{c^{(2)}}{\omega_k} t + (1 - c^{(1)}) \frac{t^2}{2} \right\}, \quad (10.6)$$

where we have three arbitrary non-dimensional constants,  $c^{(1)}$ ,  $c^{(2)}$  and  $c^{(3)}$ . For periodic solutions it is necessary that  $1 - c^{(1)} = 0$  and  $c^{(2)} = 0$ , thus

$$a^3(t) = a_*^3 \left\{ 1 + c^{(3)} - \sin \left[ \omega_k \left( t + \frac{R}{C} \right) \right] \right\}, \quad a_*^3 = \frac{3R^3 A_{pR} p_0}{\pi^2 k^2 \rho C^2}. \quad (10.7)$$

It is seen that because  $a > 0$ , and  $a_{\min}^3 = a_*^3 c^{(3)}$ , it is necessary that  $c^{(3)} > 0$ .

The value of the parameter  $c^{(3)}$  should be calculated from the flask radius periodicity condition.

It is interesting that equation (10.3) for the resonant regime with sinusoidal pressure excitation on the flask may be rewritten as

$$aa'' + 2(a')^2 = \frac{R}{a} \frac{p_R(t + R/C) - p_0}{\rho}. \quad (10.8)$$

This equation is valid only for periodic flask pressure oscillations having resonant frequencies,  $\omega_k$ , and it looks similar to the Rayleigh–Plesset equation. However, this equation has a coefficient 2 instead  $\frac{3}{2}$  in the term with  $(a')^2$  and the driving pressure has the opposite sign. The coefficient  $(R/a)$  may be considered as an amplification factor due to the convergence of the pressure waves from the flask to the surface of the bubble (i.e. the cumulation effect). It is interesting that the properties of the gas ( $\gamma$ ) and the initial conditions ( $a_0$  and  $p_0$ ) are manifested only through the flask radius or flask velocity periodicity conditions which may be presented as boundary conditions for (10.8) (also see the discussion of (12.4)–(12.6)).

The solution (10.7) yields a non-trivial and important radius,  $a_*$ , for the maximum value of the bubble radius,  $a_{\max}$ . This radius is a product of ‘large’ flask radius,  $R$ , and a small parameter  $(\Delta p_R^0 / \rho C^2)^{1/3}$ , determined by the pressure amplitude on the flask,  $\Delta p_R^0$ .

Oscillations of a gas bubble in a spherical flask

63

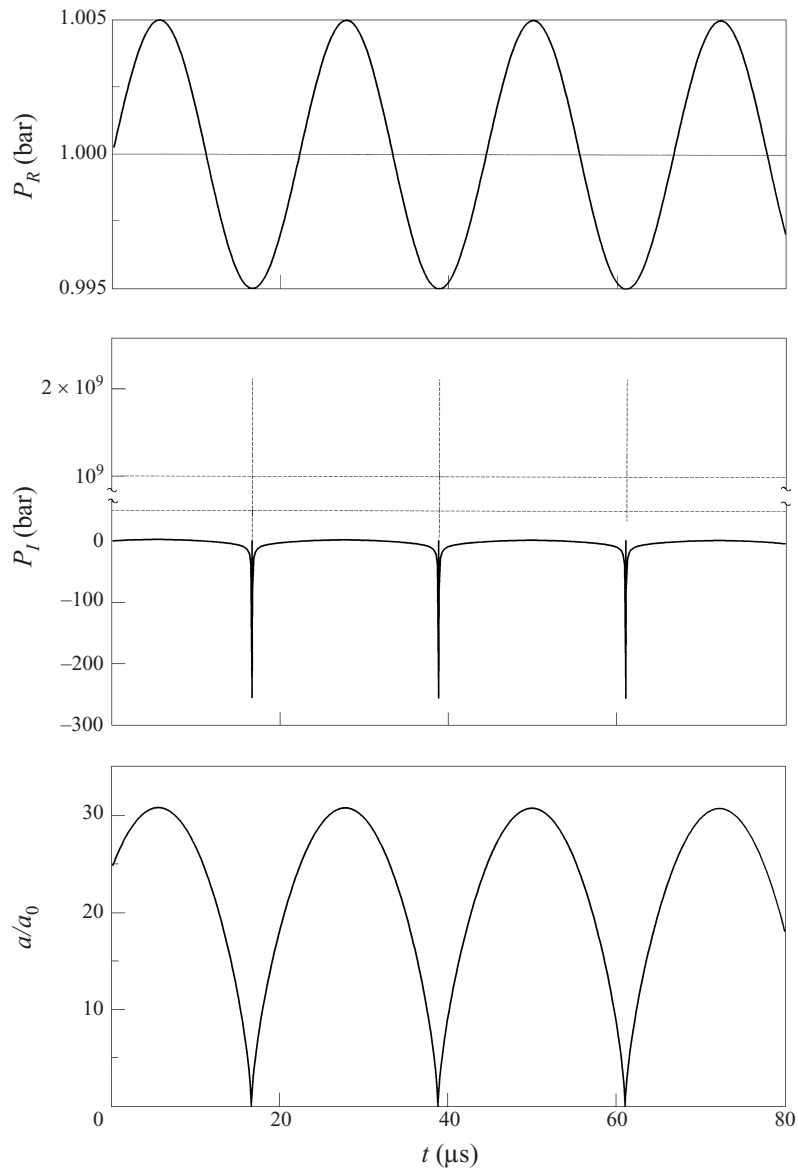


FIGURE 5. The periodic resonance regime of the isothermal ( $\kappa = 1$ ) bubble oscillations ( $a_0 = 4 \mu\text{m}$ ) in water ( $p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_0 = 300 \text{ K}$ ) in a spherical flask ( $R = 5 \text{ cm}$ ), when the flask wall produces pressure sinusoidal oscillations of amplitude,  $\Delta p_R^o = 0.005 \text{ bar}$ , and frequency,  $f = f_3 = 45 \text{ kHz}$ .

To have bubble implosion and sonoluminescence in the resonance regime it is necessary that

$$a_{\min} \ll a_0 \ll a_{\max} \sim a_* \equiv R \left( \frac{3\Delta p_R^o}{\pi^2 k^2 \rho C^2} \right)^{1/3}, \quad c^{(3)} \ll 1. \quad (10.9)$$

This means that, for the resonant regime, during an implosion the maximum value of the bubble radius,  $a_{\max}$ , does not depend on the initial value of the bubble radius,  $a_0$ . Then the maximum radius of the bubble and the compression ratio,  $\eta_{\text{com}} \equiv a_{\max}^3/a_{\min}^3$ , may be estimated by the formulae  $a_{\max}^3 \approx 2a_*^3$ ,  $\eta_{\text{com}} = 2/c^{(3)}$ .

64 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

However, the values of the minimum radius of the bubble,  $a_{\min}$ , and the compression ratio,  $\eta_{\text{com}}$ , calculated here cannot be considered as physically realistic values during bubble collapse because the implosion period does not satisfy the long-wave and small-Mach-number approximation. Indeed, the implosion period needs a separate approach using a suitable numerical code (see § 13).

The periodic resonant regime is shown in figure 5. The calculations are given for the isothermal bubble. For the adiabatic bubble, the peaks of the incident pressure and the value of the maximum compression at oscillations of the bubble radius will be considerably less. For their other characteristics, the curves completely coincide.

Let us now consider the problem of periodic resonant oscillations when the displacement,  $\delta_R$ , of the flask wall is given as a harmonic resonant oscillation with small amplitude  $\delta_R^o$  and resonant frequency  $\omega_k$ :  $\delta_R = \delta_R^o \sin(\omega_k t)$ ,  $\delta_R^o \ll R$ .

For the periodic regime the velocity of the flask wall, calculated by differentiating equation (5.6) for the velocity potential,  $\varphi_{ex}$ , yields

$$\delta_R^o \omega_k \cos(\omega_k t) = \frac{1}{R^2} \mathcal{Q} \left( t - \frac{R}{C} \right) + \frac{1}{CR} \left[ 2\psi_2' \left( t - \frac{R}{C} \right) + \mathcal{Q}' \left( t - \frac{R}{C} \right) \right]. \quad (10.10)$$

After differentiating this equation with respect to time this equation may be rewritten as

$$\frac{1}{C} [2\psi_2''(t) + \mathcal{Q}''(t)] = -\frac{1}{R} \mathcal{Q}'(t) - R \delta_R^o \omega_k^2 \sin \left[ \omega_k \left( t + \frac{R}{C} \right) \right]. \quad (10.11)$$

Substituting this expression into (5.8) one may write the differential equation for bubble-radius resonant oscillations excited by flask-wall sinusoidal displacements in the following form:

$$aa'' + \frac{3}{2}a'^2 = \frac{p_a - p_\infty}{\rho}, \quad p_\infty = p_0 + \rho R \delta_R^o \omega_k^2 \sin \left[ \omega_k \left( t + \frac{R}{C} \right) \right]. \quad (10.12)$$

Here the smallness of the parameter  $(a/R)$  was used. That is why the components entering  $\mathcal{Q}'(t)/R$  are negligibly small compared with the corresponding components on the left-hand side of (10.11).

It is interesting that for acoustically resonant harmonic displacement oscillations of the flask wall periodic radial oscillations of the bubble are described by the Rayleigh–Plesset equation (for an incompressible liquid) with the pressure ‘far from the bubble’,  $p_\infty$ , oscillating harmonically with amplitude  $\Delta p_\infty^o = \rho R \delta_R^o \omega_k^2 \sim \pi k \Delta p_R^o$ .

Here in estimating  $\Delta p_\infty^o$  it was taken into account that  $w_R^o = \delta_R^o \omega_k$  is the amplitude of the velocity on the flask wall and  $\rho \omega_R^o C \sim \Delta p_R^o$ . Then coefficient  $\pi k$  determines the efficiency or amplification factor of the pressure amplitude on the flask  $\Delta p_R^o$  for the resonance of the  $k$ th order. To have bubble implosion and sonoluminescence it is necessary (but not sufficient) to have  $\Delta p_\infty^o \gtrsim p_0$ , that is

$$\pi k \Delta p_R^o \gtrsim p_0. \quad (10.13)$$

## 11. Kinetic energy evolution for the resonance regime

It is interesting to calculate the kinetic energy of the liquid concentrated near the bubble, where the velocity distribution is given by (4.2):

$$k = \frac{1}{2} \int_a^{r_0} 4\pi r^2 \rho w^2 dr \approx 2\pi \rho \int_a^\infty \left( \frac{w_a a^2}{r^2} \right)^2 r^2 dr = 2\pi \rho a^3 (w_a)^2. \quad (11.1)$$

Oscillations of a gas bubble in a spherical flask

65

For the resonant periodic regime equation (10.7) yields

$$w_a = a' = a_* \frac{d}{dt} \left\{ 1 + c^{(3)} - \sin \left[ \omega_k \left( t + \frac{R}{C} \right) \right] \right\}^{1/3} \\ = -\frac{a_* \omega_k}{3} \left\{ 1 + c^{(3)} - \sin \left[ \omega_k \left( t + \frac{R}{C} \right) \right] \right\}^{-2/3} \cos \left[ \omega_k \left( t + \frac{R}{C} \right) \right]. \quad (11.2)$$

Thus the kinetic energy of the liquid,  $K$ , may be expressed as

$$K = \frac{2\pi\rho a_*^5 \omega_k^2}{9} \frac{\cos^2 \Omega}{\{1 + c^{(3)} - \sin \Omega\}^{1/3}} \left( \Omega \equiv \omega_k \left( t + \frac{R}{C} \right) \right). \quad (11.3)$$

To calculate the maximum value of the kinetic energy it is necessary to calculate the derivative with respect to time:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{2\pi\rho a_*^5 \omega_k^2 \cos \Omega [-2 \sin \Omega \{1 + c^{(3)} - \sin \Omega\} + \frac{1}{3} \cos^2 \Omega]}{9 \{1 + c^{(3)} - \sin \Omega\}^{4/3}}. \quad (11.4)$$

Equating this expression to zero, one obtains two equations for optimal values of  $K$ :

$$\cos \Omega = 0, \quad \sin^2 \Omega - \frac{6}{5}(1 + c^{(3)}) \sin \Omega + \frac{1}{5} = 0. \quad (11.5)$$

The first equation and its roots are a trivial solution which corresponds to the minimum value of the liquid kinetic energy,  $K = 0$ . The second equation and its real root corresponds to the maximum value of  $K$ :  $(\sin \Omega)_1 = 1 + c^{(3)} > 1$ ,  $(\sin \Omega)_2 = \frac{1}{5}(1 + c^{(3)})$ .

Thus the maximum value of the liquid kinetic energy is

$$K_{\max} = \frac{2\pi\rho a_*^5 \omega_k^2}{9} \frac{\frac{24}{25}(1 - \frac{1}{12}c^{(3)} - \frac{1}{24}(c^{(3)})^2)}{\{\frac{4}{5}(1 + c^{(3)})\}^{1/3}}. \quad (11.6)$$

It is seen that for bubble implosion, when  $c^{(3)} \ll 1$ , the maximum value of the kinetic energy does not depend on the constant  $c^{(3)}$  or on the properties of the gas and initial radius of the bubble  $a_0$ :

$$K_{\max} \approx \frac{2\pi\rho a_*^5 \omega_k^2}{9} \approx \frac{8.52}{k^{4/3}} \left( \frac{\Delta p_R^0}{\rho C^2} \right)^{5/3} \rho R^3 C^2. \quad (11.7)$$

It should be noted that  $K_{\max}$  is the energy that can be used for compression of the gas and the liquid at the moment of the maximum compression of the gas bubble.

The characteristic values of the bubble radius  $a^*$  and the velocity on the interface  $w^*$  at the moment of the maximum value of the kinetic energy ( $\sin \Omega \approx \frac{1}{5}$ ) are

$$a^* \approx 0.93a_*, \quad w^* \approx -0.387a_*\omega_k \approx -0.817k^{1/3} \left( \frac{\Delta p_R^0}{\rho C^2} \right)^{1/3} C. \quad (11.8)$$

It is interesting to note that for the resonance regime under consideration, the interface velocity  $w_0$  at the moment when the bubble radius coincides with the initial value  $a_0$  equals

$$w_0 \approx -0.471\omega_k \sqrt{\frac{a_*^3}{a_0}} = -0.260 \left( \frac{R_0}{a_0} \right)^{1/2} \left( \frac{\Delta p_R^0}{\rho C^2} \right)^{1/2} C. \quad (11.9)$$

66 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

## 12. Nonlinear analysis for the near-resonant frequencies – small deviation from resonance

Let us consider periodic oscillations with frequencies close to the resonant frequency:

$$\omega = \omega_k + \Delta\omega, \quad \Delta\omega \ll \omega_k \quad (\omega_k = \pi k C/R, \quad k = 1, 2, 3 \dots). \quad (12.1)$$

The periodicity condition implies

$$\begin{aligned} \psi_2' \left( t + \frac{R}{C} \right) &= \psi_2' \left( t + \frac{R}{C} - k \frac{2\pi}{\omega} \right) = \psi_2' \left( t + \frac{R}{C} - k \frac{2\pi}{\omega_k + \Delta\omega} \right) \\ &= \psi_2' \left( t + \frac{R}{C} - \frac{2\pi k}{\omega_k} \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_k} \right) \right) + O \left( \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_k} \right)^2 \right) \\ &= \psi_2' \left( t - \frac{R}{C} + \frac{2\pi k}{\omega_k} \frac{\Delta\omega}{\omega_k} \right) \\ &= \psi_2' \left( t - \frac{R}{C} \right) + \frac{2\pi k}{\omega_k} \frac{\Delta\omega}{\omega_k} \psi_2'' \left( t - \frac{R}{C} \right) + O \left( \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_k} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (12.2)$$

Next, equation (6.9) may be rewritten as

$$\left. \begin{aligned} p_R(t) &= p_0 - \frac{\rho}{R} \left[ \frac{2R}{C} \frac{\Delta\omega}{\omega_k} \psi_2'' \left( t - \frac{R}{C} \right) - Q' \left( t - \frac{R}{C} \right) \right] \\ \text{or} \quad \frac{2}{C} \psi_2''(t) &= \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \frac{a}{R} (aa'' + 2a^2) - \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \frac{p_R(t + R/C) - p_0}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

In this case the result depends on a non-dimensional parameter characterizing the influence of the bubble on the near-resonant oscillations:

$$A_* = \frac{a_0}{R} \frac{\omega_k}{\Delta\omega}.$$

This parameter is a product of small ( $a_0/R$ ) and large ( $\omega_k/\Delta\omega$ ) parameters.

Taking into account (12.3), equation (5.8) may be rewritten in the following form:

$$aa'' + \frac{3}{2}a^2 = \frac{p_a - p_0}{\rho} - \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \frac{p_R(t + R/C) - p_0}{\rho} + \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \frac{a}{R} (aa'' + 2a^2) + \frac{1}{C} Q''(t). \quad (12.4)$$

The pressure inside the bubble may be greater than the driving pressure ( $p_a - p_0$ )  $\sim \omega_k \Delta p_R / \Delta\omega$ , thus the first two terms on the right-hand side are dominant terms. If

$$\frac{a}{R} \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \ll 1, \quad (12.5)$$

then the last two terms in (12.4) are small and one can use the approximation that was used in §6:

$$Q' \cong a \left[ \frac{a^2}{2} + \frac{p_a - p_0}{\rho} - \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \frac{\Delta p_R(t + R/C)}{\rho} \right].$$

Differentiating this expression with respect to time one can derive from (12.4) the following ordinary differential equation for near-resonant periodic forced oscillations

of the bubble in the flask:

$$\left(1 - \frac{a'}{C} - \frac{a}{R} \frac{\omega_k}{\Delta\omega}\right) a \frac{d^2 a}{dt^2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{a'}{2C} - 2 \frac{a}{R} \frac{\omega_k}{\Delta\omega}\right) \left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \left(1 + \frac{a'}{C}\right) \times \left[\frac{p_a - p_0}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \Delta p_R \left(t + \frac{R}{C}\right)\right] + \frac{a}{\rho C} \frac{d}{dt} \left[p_a - p_0 - \frac{\omega_k}{\Delta\omega} \Delta p_R \left(t + \frac{R}{C}\right)\right]. \quad (12.6)$$

Typical solutions of equation (12.6) are shown on figure 6 for different flask pressure amplitudes. The figure shows that the oscillations of the bubble radius both for its adiabatic and isothermal behaviour differ quantitatively, but not qualitatively. The corresponding curves for the incident pressure and the pressure at local infinity are given in figure 7. The dependence of  $a_{\min}$  and  $a_{\max}$  on the frequency shift from the third flask resonance for  $a_0 = 4 \mu\text{m}$  and different pressure amplitudes is shown on figure 8 for the isothermal bubble. The resonant case ( $\Delta\omega = 0$ ) is denoted by the dark dots. In the vicinity of the flask resonance the curves are given by the dashed lines and equation (12.6) is not valid.

It should be noted that the near-resonant ( $\Delta\omega \ll \omega_k$ ) regime, which is described by (12.6), corresponds to limitation (12.5):

$$\frac{a}{R} \ll \frac{\Delta\omega}{\omega_k} \ll 1, \quad (12.7)$$

and is quite different from the exact resonance ( $\Delta\omega = 0$ ,  $\omega = \omega_k$ ), described by analytical solution (10.7). To have the near-resonant regime close to the exact resonance it is necessary to have extremely small frequency shift:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_k} \ll \frac{a}{R} \ll 1. \quad (12.8)$$

For single-bubble sonoluminescence experiments with a small bubble ( $a/R \sim 10^{-4}$ ) the tuning of frequency and other parameters of the system to have exact, or almost exact, resonant bubble excitation is hardly attainable except when gravity is absent, since for this case bubble displacement from the centre of the flask is excluded.

### 13. The peak shock waves emitted by the collapsing bubble

The theory presented in this paper is valid only for relatively slow evolution of the bubble. During implosion, which comprises only a very small part of the total period, the approximation of liquid incompressible near the bubble boundary layer is no longer a good approximation. Estimations and numerical calculations (Lofstedt, Barber & Putterman 1993; Moss *et al.* 1994) have shown that during an implosion the pressure in and near the bubble may be of order  $10^6$  bar, the density of the water may increase by 2 to 3 times, and the interfacial Mach number,  $M_a$ , may be larger than unity. This means that for bubble implosion it is necessary to take into account the nonlinear compressibility of the liquid near the bubble, shock wave formation and shock interaction both in the liquid and in the gas, convergence of the shock waves to the centre of the bubble and their cumulation (Wu & Roberts 1993; Moss *et al.* 1994). Significantly, shock wave cumulation may generate a superhigh pressure and temperature near the centre of the bubble. This process must be considered by a separate numerical (i.e. HYDRO) code based on the partial differential conservation equations and nonlinear equations of state with plasma and light radiation effects (Moss *et al.* 1994).

68 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

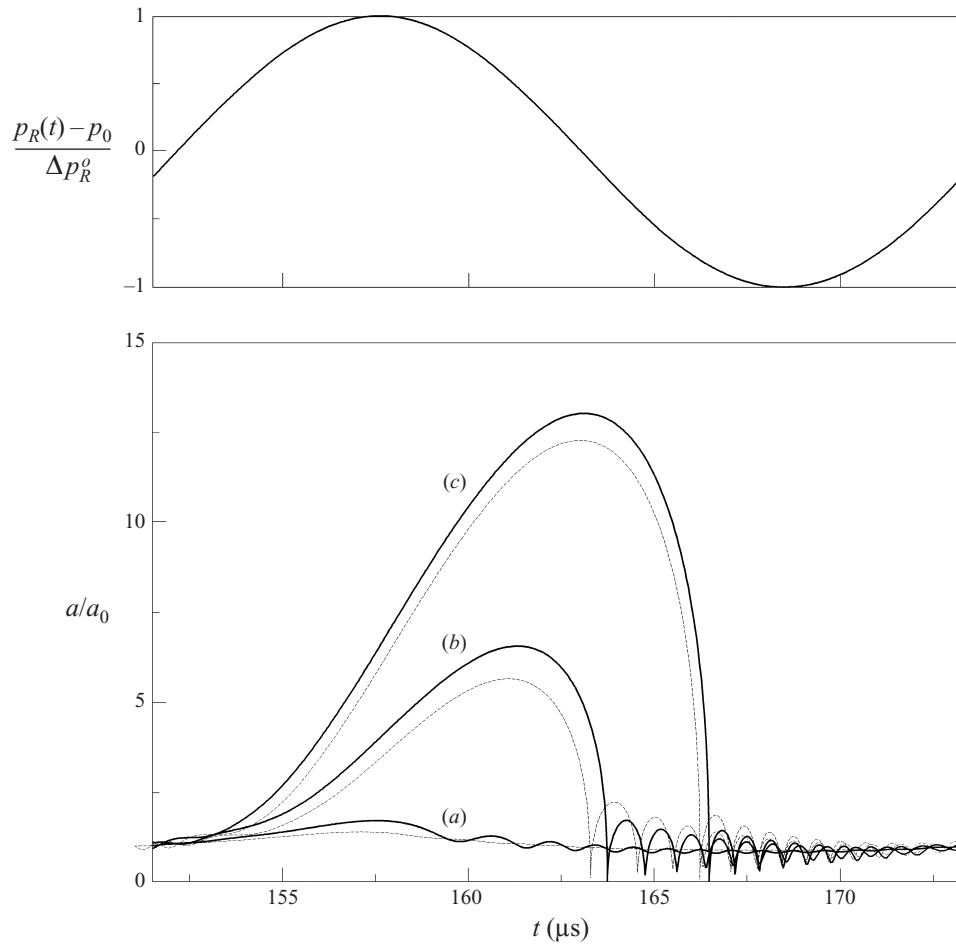


FIGURE 6. Excitation of gas bubble ( $a_0 = 4\ \mu\text{m}$ ) oscillations in a flask ( $R = 5\ \text{cm}$ ) filled with water ( $p_0 = 1\ \text{bar}$ ,  $T_0 = 300\ \text{K}$ ) when the flask wall produces pressure sinusoidal oscillations with the frequency,  $f = 46\ \text{kHz}$  ( $f \approx f_3$ ,  $\Delta f = 1\ \text{kHz}$ ,  $\Delta\omega = 6.28\ \text{kHz}$ ) and different pressure amplitudes: (a)  $\Delta p_R^0 = 0.02\ \text{bar}$ , (b)  $\Delta p_R^0 = 0.03\ \text{bar}$ , (c)  $\Delta p_R^0 = 0.04\ \text{bar}$ . Solid and dashed lines correspond isothermal ( $\kappa = 1$ ) and adiabatic ( $\kappa = \gamma$ ) gas, respectively.

Fortunately the numerical code for the implosion period need consider only a very thin, strongly compressible, liquid boundary layer of thickness  $\delta r_s = C\delta t_s \sim 10\text{--}10^2\ \mu\text{m}$ . On the external surface of this layer,  $r = a + \delta r_s$ , the solution presented in this paper may be used as a boundary condition. Such a strategy can reduce the time required for numerical calculations by a few orders of magnitude.

The almost ‘catastrophic’ collapse of the bubble during an implosion, induces a superhigh pressure in the gas bubble, and the rapidly expanding rebound of the bubble emits extremely short-duration ( $\delta t_s < 10^{-8}\ \text{s}$ ) pressure waves propagating from the centre of the flask to the wall of the flask during the low-Mach-number stage. These waves must be considered separately, taking into account the nonlinear compressibility of the liquid, since the sound speed increases with pressure, which greatly intensifies attenuation of the shock waves. In contrast, for linear acoustic theory (i.e. linear compressibility of the liquid) we know that the shock waves attenuate only due to the spherical divergence.



## Oscillations of a gas bubble in a spherical flask

69

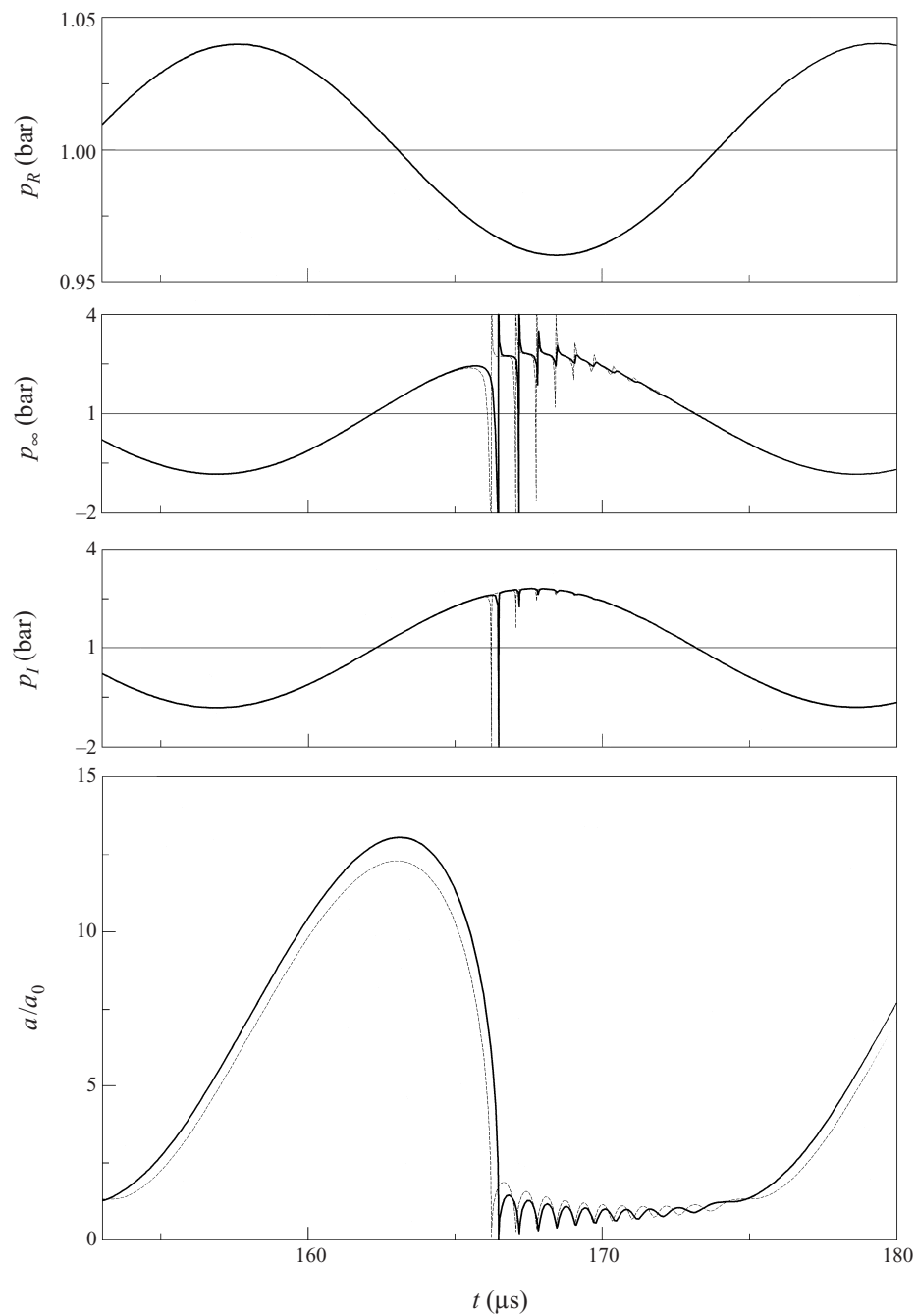


FIGURE 7. The same as figure 6 (line *c*) but showing the evolution of the incident pressure and the pressure at local infinity.

The contribution of nonlinear compressibility to wave attenuation can be understood by considering the nonlinear Boussinesq equation for a simple plane wave propagating in the  $x$ -direction without reflections, with a velocity which is close to the sound speed,  $C$ . The attenuation of the peak of the pressure,  $p_{\max}$ , for a wave

70 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

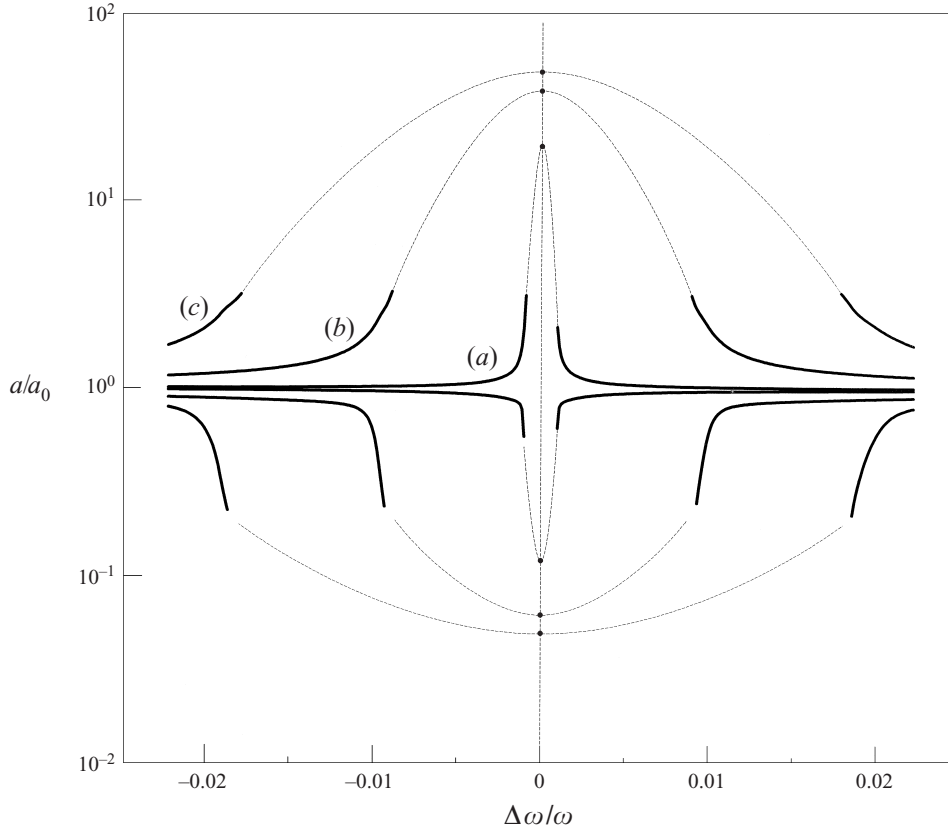


FIGURE 8. The dependence of  $a_{\min}$  and  $a_{\max}$  on frequency shift from the third flask resonance ( $\omega = \omega_3 + \Delta\omega$ ) for  $a_0 = 4 \mu\text{m}$  and different pressure amplitudes. (a)  $\Delta p_R^o = 0.001$  bar, (b)  $\Delta p_R^o = 0.01$  bar, (c)  $\Delta p_R^o = 0.02$  bar.

having the initial duration,  $\tau^o$ , is given by (Whitham 1974)

$$\frac{p_{\max}}{p_{\max}^o} = \frac{1}{\sqrt{1 + (x/\lambda^o)}}, \quad \lambda^o = \frac{\rho C^3}{\beta} \frac{\tau^o}{p_{\max}^o}, \quad \beta \equiv \frac{d^2 p}{dv^2} > 2\rho^3 C^2, \quad v \equiv \frac{1}{\rho}. \quad (13.1)$$

Along the direction of wave propagation, products of the amplitude of the wave and its duration  $\tau$  or length  $\lambda$  are constant:

$$p_{\max} \tau = p_{\max}^o \tau^o, \quad p_{\max} \lambda = p_{\max}^o \lambda^o. \quad (13.2)$$

For water having  $p_{\max}^o = 100$  bar, and  $\tau^o = 10^{-8}$  s, the characteristic length of the attenuation is  $\lambda^o = 3$  mm. This analysis shows that nonlinear compressibility of the liquid increases the attenuation of the peak waves initiated by the collapsing bubble, and these peak waves become quite weak before reaching the flask wall.

#### 14. Summary

(i) There are two stages of the bubble's oscillation process. The first one is a low-Mach-number stage when the velocity of the bubble's interface is small compared with the sound speed in the liquid. The second stage, bubble implosion, is a stage of very rapid bubble collapse and gas compression, followed by a rebounding expansion.

During collapse and rebound the velocity of the interface may be comparable to, or larger than, the local liquid sound speed. Significantly, the low-Mach-number period takes up almost all the time of the overall process. Moreover, implosion takes place at, or near, the flask's acoustic resonant frequency, and takes place in a very short time ( $< 10^{-8}$  s).

(ii) Two asymptotic solutions have been derived which are valid for the low-Mach-number regime. The first one is an asymptotic solution for the field far from the bubble, and it corresponds to a linear hyperbolic wave equation of second order. The second one is an asymptotic solution for the field near the bubble and corresponds to the Laplace equation for an incompressible fluid.

(iii) The low-Mach-number stage of the forced oscillations of a bubble in a compressible liquid may be described by the Rayleigh–Plesset equation, where the driving pressure is the pressure at local infinity  $p_\infty$  or the Herring equation, where the driving pressure is the incident pressure  $p_I$ . These driving pressures,  $p_\infty$ , and  $p_I$ , are different from each other and from the pressure on the flask wall,  $p_R(t)$ . The driving pressures  $p_\infty$  and  $p_I$  may be calculated from the flask-wall pressure evolution  $p_R(t)$  or from the flask-wall velocity evolution,  $w_R(t)$ , using ordinary difference-differential equation having lagging and leading time.

(iv) For the low-Mach-number stage for small gas bubbles ( $a \lesssim 10^{-5}$  m) oscillations have frequencies of  $\omega \lesssim 10^5$  s $^{-1}$ , which are typical of single-bubble sonoluminescence experiments, isothermal gas bubble expansion and compression occurs ( $\kappa \approx 1$ ).

In contrast, during the implosion stage ( $\delta t \sim 10^{-8}$  s) there is transition to adiabatic compression and expansion of the gas bubble.

During the low-Mach-number stage of gas bubble oscillation in an acoustic field interfacial heat transfer weakly influences the bubble radius evolution,  $a(t)$ , but strongly influences the evolution of gas temperature evolution,  $T(t)$ .

(v) The analysis of an initial value problem for initiation of bubble oscillations by flask excitation reveals a very strong and curious evolution of the oscillations, and an attempt to obtain the periodic regime using the direct numerical codes based on partial differential conservation equations is not an effective procedure because one needs to calculate many evolving oscillations. Fortunately, the periodic process may be analysed analytically.

(vi) In the case of small harmonic oscillations, the response function, which is equal to the ratio of the relative amplitude of the bubble radius  $a$  to the relative amplitude of the flask's forcing pressure  $p_R$ , depends on the flask frequency  $\omega$ . The maxima of this function determines the resonance of the bubble oscillations and they are associated with the acoustic flask resonance ( $\omega = \omega_k$ ), when during the time of pressure wave propagation from the flask to the centre and back an integer number ( $k$ ) of oscillations takes place (i.e.  $2R/C = 2\pi k/\omega_k$ ).

It is interesting that away from the bubble's Minnaert frequency resonance zone the smaller the bubble the higher the relative response of the bubble to flask excitation. This effect may be one of the possible reasons why sonoluminescence has only been observed for very small bubbles ( $a_0 = 4$  to  $10 \mu\text{m}$ ).

(vii) For near-resonant frequencies it is necessary to use nonlinear solutions. For such frequencies the bubble oscillations are not harmonic and implosions may occur even when oscillations of the flask wall have extremely small amplitudes. This is explained by the amplification of the convergent acoustic waves initiated by flask motion.

(viii) Two near-resonant asymptotic solutions ( $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_k \ll \omega_k$ ) were found.

72 *R. I. Nigmatulin, I. Sh. Akhatov, N. K. Vakhitova and R. T. Lahey Jr.*

The first one (near the flask's exact acoustic resonance) corresponds to an extremely small frequency shift from the flask's acoustic resonant frequency ( $\Delta\omega/\omega_k \ll a/R$ ). For most practical situations this regime is not attainable. Indeed, if one wished to achieve this resonant regime it would only be possible in a situation in which gravity is absent, and the bubble does not experience displacement from the centre of the flask.

The second near-resonant asymptotic solution corresponds to a situation which is practically attainable:  $\Delta\omega/\omega_k \gg a/R$ .

(ix) The maximum radius of the bubble for the exact resonant periodic regime with implosion does not depend on the initial radius of the bubble  $a_0$  and is determined by (10.7). Interestingly, for a small deviation of the frequency  $\omega$  from the resonant one  $\omega_k$ , the influence of  $a_0$  may be noticeable.

(x) The amplitude of the pressure at the 'local infinity' of the bubble  $\Delta p_\infty^o$  and the incident pressure  $\Delta p_I^o$  may be much larger than the amplitude of the pressure on the flask,  $\Delta p_R^o$ . This is due to amplification of the acoustic waves from the flask wall due to spherical convergence, and this amplification is fully or partly compensated by the expansion and compression of the bubble. This compensation is especially strong at resonant frequencies.

(xi) A threshold character is exhibited by either a frequency shift,  $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_k$ , or a change in pressure amplitude on the flask's wall,  $\Delta p_R^o$ , when near resonant excitation.

(xii) For calculation of bubble implosion it is necessary to take into account the nonlinear compressibility of the liquid, and shock wave formation, but only in a small sphere within a radius of about ten radii of the bubble (i.e.  $10a$ ).

(xiii) The 'catastrophic' collapse of the bubble during an implosion causes a super-high pressure in the gas bubble. The expanding rebound of the bubble and extremely short time duration associated with this expansion ( $\delta t_s < 10^{-8}$  s), causes high-pressure shocks wave to be emitted, which propagate from the centre of the flask to the wall of the flask. According to linear acoustic theory this strong shock wave would attenuate only due to spherical divergence and would have a high enough amplitude to strongly shock the flask wall. However, due to nonlinear compressibility of the liquid, where sound speed increases with the pressure, the attenuation of the shock wave is very strong, and the shock wave becomes very weak before it reaches the flask wall, producing only some additional high-frequency 'noise'.

(xiv) More study of the picosecond processes of shock wave cumulation in the centre of the bubble and the resultant high gas temperatures is needed. This will require the use of suitable HYDRO codes and nonlinear equations of state for gas and liquid.

#### REFERENCES

- FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B. & SANDS, M. 1964 *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley.
- HERRING, C. 1941 Theory of the pulsations of the gas bubble produced by an underwater explosion. *OSRD Rep.* No. 236.
- KNAPP, R. T., DAYLY, J. W. & HAMMIT, F. G. 1970 *Cavitation*. McGraw-Hill.
- LEZZI, A. & PROSPERETTI, A. 1987 Bubble dynamics in a compressible liquid. Part 2. Second order theory. *J. Fluid Mech.* **185**, 289.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. 1959 *Fluid Mechanics*. Pergamon.
- LOFSTEDT, R., BARBER, B. P. & PUTTERMAN, S. J. 1993 Toward a hydrodynamic theory of sonoluminescence. *Phys. Fluids A* **5**, 2911.

*Oscillations of a gas bubble in a spherical flask*

73

- MOSS, W. C., CLARKE, D. B., WHITE, J. W. & YOUNG, D. A. 1994 Hydrodynamic simulation of bubble collapse and picosecond sonoluminescence. *Phys. Fluids* **6**, 2979.
- NIGMATULIN, R. I. 1991 *Dynamics of Multiphase Systems*, vol. 1. Hemisphere.
- NIGMATULIN, R. I., AKHATOV, I. SH. & VAKHITOVA, N. K. 1999a Forced oscillations of a gas bubble in a spherical volume of a compressible liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **40**(2), 285–291.
- NIGMATULIN, R. I., AKHATOV, I. SH., VAKHITOVA, N. K. & LAHEY, R. T. 1999b Hydrodynamics, acoustics and transport in sonoluminescence phenomena. In *Sonochemistry and Sonoluminescence* (ed. L. A. Crum *et al.*), pp. 127–138. Kluwer.
- NIGMATULIN, R. I. & LAHEY, R. T. 1995 Prospects of bubble fusion. In *Proc. 7th Intl Meeting on Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics (NURETH-7)*, vol. 1, p. 49. American Nuclear Society.
- NIGMATULIN, R. I., SHAGAPOV, V. SH., VAKHITOVA, N. K. & LAHEY, R. T. 1995 A method for superhigh compression-induced temperatures in a gas bubble using non-periodic resonance vibration with moderate amplitudes. *Phys.-Dok. (Russian Acad. Sci.)* **40**, 122.
- NIGMATULIN, R. I., SHAGAPOV, V. SH., VAKHITOVA, N. K. & LAHEY, R. T. 1996 A method for superhigh compression-induced temperatures in a gas bubble using non-periodic resonance liquid pressure forcing. *Chem. Engng Commun.* **17**, 152–153.
- PROSPERETTI, A. 1987 The equation of bubble dynamics in a compressible liquid. *Phys. Fluids* **30**, 3626.
- PROSPERETTI, A. 1994 Bubble dynamics: some things we did not know 10 years ago. In *Bubble Dynamics and Interface Phenomena* (ed. J. Blake, J. Boulton-Stone & N. Thomas), p. 3. Kluwer.
- PROSPERETTI, A. & LEZZI, A. 1986 Bubble dynamics in a compressible liquid. Part 1. First order theory. *J. Fluid Mech.* **168**, 457.
- RAYLEIGH, LORD. 1917 The pressure developed in a liquid on the collapse of a spherical cavity. *Phil. Mag.* **34**, 94.
- VARGAFIK, N. B. 1972 *Manual of Thermophysical Properties of Gases and Liquids*. Moscow, Nauka.
- WHITHAM, G. B. 1974 *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley.
- WU, C. C. & ROBERTS, P. H. 1993 Shock-wave propagation in a sonoluminescing gas bubble. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3424.

---

*Р. НИГМАТУЛИН,  
академик РАН*

## **ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОЛЕ ГОСУДАРСТВЕННЫХ РАСХОДОВ В ВВП И ТЕМПАХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА**

В журнале “Вопросы экономики” была опубликована статья А. Илларионова и Н. Пивоваровой “Размеры государства и экономический рост”<sup>1</sup> с детальным обсуждением того, как размеры государства (его доля в ВВП) влияют на темпы экономического роста. Авторы статьи отстаивают правильный тезис, что России необходимо ускорение экономического роста, иначе по уровню жизни мы никогда не догоним даже Португалию, а Китай нас перегонит. Такой тезис все чаще встречается в комментариях об экономике России. В качестве единственного способа повышения темпов экономического роста авторы предлагают существенное сокращение государственных расходов без каких-либо оговорок о том, по каким статьям это надо делать.

Сразу же отмечу, что обоснование ими данного положения ошибочно. Темп экономического роста есть функция многих переменных и факторов. Некоторые из них даже нельзя выразить численно, в частности, уровень честности в бизнесе и в государственных органах, национальные традиции, бережливость, самочувствие нации и многое другое. Построение зависимостей экономического роста от одной числовой переменной (макроэкономического параметра) по данным разных стран, характеризующихся большим количеством макроэкономических параметров и нечисловых характеристик, влияющих на экономику и существенно между собой различающихся, должно дать и дает огромный разброс точек.

Отсутствие видимой тенденции в столь разбросанной или хаотичной совокупности экспериментальных наблюдений (точек) вовсе не означает, что рассматриваемый макроэкономический параметр не влияет на темп экономического роста. Такой формальный и упрощенный анализ функции многих переменных при вариации одной переменной без контроля и учета изменения остальных переменных и факторов не позволяет выявлять закономерности. Это стандартная проблема при обработке данных (экспериментов) во всех науках.

---

<sup>1</sup> Илларионов А., Пивоварова Н. Размеры государства и экономический рост. – Вопросы экономики, 2002, № 9, с. 18–45.

*Р. Нигматулин*

Теперь несколько подробнее о том, как А. Илларионов и Н. Пивоварова доказывают, что именно сокращение государственных расходов является фактически единственным методом повышения экономического роста. Они располагают экспериментальные точки на разных плоскостях с двумя координатами и строят корреляционные поля для двух переменных. Первой координатой (переменной, абсциссой или аргументом) является один из важнейших макроэкономических факторов страны  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Такими факторами (переменными) служат или госрасходы ( $i = 1$ ), или внутренний спрос ( $i = 2$ ), или банковское кредитование ( $i = 3$ ), или цены на нефть ( $i = 4$ ) и электроэнергию ( $i = 5$ ), или инвестиции в основной капитал ( $i = 5$ )<sup>2</sup>. Второй координатой (ординатой) является темп экономического роста  $y$ , рассматриваемый как темп прироста ВВП. Экспериментальные точки наносятся для всех стран, групп стран и отдельных стран за годы последнего десятилетия (1992–2001 гг.). На каждом таком графике исходя из минимального квадратичного отклонения от нанесенных точек строится прямая (или параболическая) линия, “осредняющая” или “обобщающая” экспериментальные точки и призванная показать характер влияния одного из указанных макроэкономических факторов  $x_i$  на темп экономического роста  $y$ .

В качестве меры или характеристики однозначности или разброса точек относительно “осредняющей” или “обобщающей” линии используется коэффициент детерминации  $R^2$ , который вычисляется как единица минус суммарное относительное отклонение наблюдений (экспериментальных точек) от “осредняющей” линии и выдается компьютером вместе с “осредняющей” линией.

Для описанного представления функции  $y$ , которая может зависеть от многих переменных  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), имеет место следующая математическая теорема.

1. Если для одного из представлений (для одного из графиков)  $y(x_j)$  величина коэффициента детерминации велика ( $R^2 > d^* \approx 0,8$ , то есть разброс точек мал), то можно говорить, что такая формальная статистика выявляет тенденцию влияния соответствующего макроэкономического аргумента  $x_j$  на темп экономического роста  $y$  независимо от вариации остальных макропараметров  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ), которые различаются для разных стран. Другими словами, в этом случае темп экономического роста фактически являлся бы практически функцией одной переменной  $y(x_j)$  от соответствующего макроэкономического аргумента  $x_j$  и практически не зависел бы от других макроэкономических аргументов  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ).

2. Если величина коэффициента детерминации мала ( $R^2 < d_*$ , где  $d_* \approx 0,5$ , то есть разброс точек велик), то влияние соответствующего макроэкономического аргумента  $x_j$  на темп экономического роста  $y$  неоднозначно и зависит от значений всех или некоторых из остальных макроэкономических аргументов  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ). Другими

<sup>2</sup> В обсуждаемой статье утверждается отсутствие корреляции между долей госрасходов  $x_1$  и 46 другими числовыми параметрами, характеризующими географию, климат, природные ресурсы, демографию, диверсификацию населения и административное деление, структуру экономики, внешнюю торговлю.

*Об оптимальной доле государственных расходов в ВВП и темпах экономического роста*

словами, в этом случае темп экономического роста  $y$  является функцией не одной переменной  $y(x_j)$ , а многих переменных, то есть зависит и от других макроэкономических аргументов  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ).

Статистические расчеты, выполненные А. Илларионовым и Н. Пивоваровой, не выявили однозначной связи темпа экономического роста и какого-либо из указанных макроэкономических аргументов. Для большей части построенных регрессий (см. Приложение к статье авторов) коэффициент детерминации мал – меньше 0,1. Следовательно, темп экономического роста существенно зависит от многих макроэкономических параметров, то есть, как отмечено выше, является функцией многих переменных (макроэкономических параметров или аргументов), а не только от доли госрасходов в ВВП, как утверждают авторы.

Авторы статьи пытаются открыть закон исходя лишь из формальной статистики, не вникая в суть макроэкономических механизмов, действующих через большое число факторов. А. Илларионов и Н. Пивоварова полагают, что если они не обнаружили влияния какого-либо параметра на темп экономического роста, имея каждый раз огромный разброс точек, значит такого влияния нет. А не обнаружили они этого влияния потому, что пользовались неподходящими инструментарием и методом и “забыли” о вышеуказанной теореме. Авторы статьи пытаются найти единственный макроэкономический аргумент, существенно влияющий на темпы экономического роста. Но такового единственного нет, их много.

Чтобы уменьшить разбросы точек, А. Илларионов и Н. Пивоварова пытаются обосновать закон отдельно для разных групп стран (кластеров). Однако объединенные ими в группы страны достаточно однородны лишь по двум (из более чем пятидесяти) параметрам: численности населения и величине ВВП на душу населения. По численности населения выделены четыре полосы: менее 1 млн. человек, от 1 млн. до 5 млн., от 5 млн. до 20 млн. и более 20 млн. человек (с. 27). По величине ВВП на душу – три полосы: менее 3000 долл., от 3000 до 9000 и более 9000 долл. В итоге выделены 12 групп. Россия попала в группу стран “с большой численностью населения” (более 20 млн. человек) и средним уровнем развития (ВВП на душу населения – от 3000 до 9000 долл.). Этот кластер состоит из 17 стран: Таиланд, Индонезия, Перу, Аргентина, Мексика, Колумбия, Марокко, Венесуэла, Иран, Турция, Египет, Алжир, ЮАР, Бразилия, Румыния, Россия и Польша. Каждая из них представлена одной точкой на плоскости с координатами – доля госрасходов в ВВП  $x_1$  и среднегодовой темп прироста ВВП в 1991–2000 гг.  $y$  (см. рис. 6 в статье авторов, в данном тексте см. рис. 1). Причем для 14 стран доли госрасходов  $x_1$  равны от 18 до 35%, а темпы прироста  $y$  составляют от 2 до 4%. Две страны выглядят “изгоями” с отрицательным приростом  $y$ : Румыния, представленная долей госрасходов  $x_1 = 35\%$  и темпом прироста  $y = -2\%$ , и Россия, представленная долей госрасходов  $x_1 = 42\%$  и темпом прироста  $y = -4\%$ .

И вот на основании такого подбора компьютер строит “параболу Илларионова–Пивоваровой” с коэффициентом детерминации, равным 0,82. Эта парабола имеет максимальный темп прироста, равный всего 4%, при доле госрасходов  $x_1 = 20\text{--}23\%$ . Хотя существенно выше



Р. Нигматулин



Рис. 1

“параболы” находится Польша с долей госрасходов  $x_1 = 47\%$  и темпом прироста  $y = 4\%$ . Однако, чтобы не портить “закономерности”, Польша, как не соответствующая выбранной “теории”, без объяснений отбрасывается. Но с неменьшими основаниями можно было, оставляя “точку” Польши, отбросить “точку” России, которая в рассматриваемом десятилетии была в “ненормальном состоянии”. А если отбросить еще и “точку” Румынии, тоже пережившей революцию, тогда закономерность станет существенно другой, а именно доля госрасходов в ВВП в рассматриваемой группе стран практически не влияет на темп роста экономики (см. рис. 2).

На уровне такой “методологии” А. Илларионов и Н. Пивоварова делают следующий вывод. “Для России критическим значением величины государственных расходов, при превышении которого устойчивый экономический рост прекращается и начинается спад, выступает уровень в 36–38% ВВП. Оптимальными размерами государства, при которых обеспечивается максимизация темпов экономического роста, для России является полоса значений в пределах 18–21% ВВП” (с. 42).

Хотелось бы спросить авторов, почему Польша, не самая организованная страна, в которой доля государственных расходов составля-

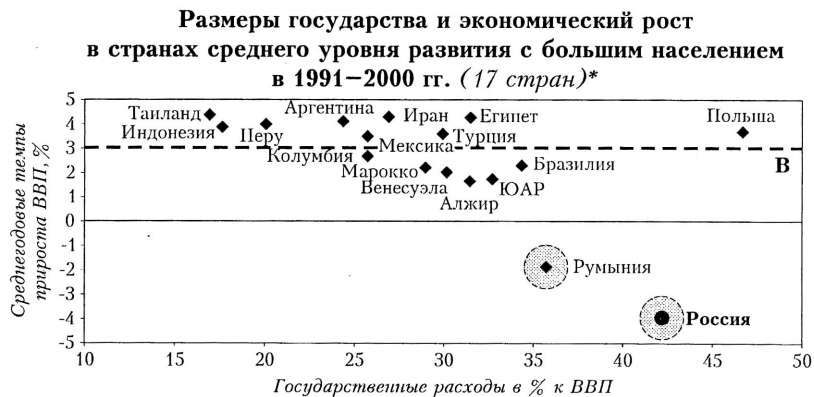


Рис. 2

*Об оптимальной доле государственных расходов в ВВП и темпах экономического роста*

ет 47%, может иметь темп экономического роста 4%, а Россия не может? А ведь в России и при большей доле государственных расходов темпы роста были выше.

Далее А. Илларионов и Н. Пивоварова анализируют точки только для России, но по годам в период за 1992–2002 гг. На рис. 8 (в данном тексте см. рис. 3)<sup>3</sup> с коэффициентом детерминации, чуть меньшим 0,8, нами нанесена “осредняющая” прямая линия, показывающая, что если снизить долю государственных расходов в ВВП до 20%, то темп роста ВВП должен равняться 19%, а при 38% – быть нулевым. Вся эта закономерность основана на точках, соответствующих обвальному трехлетию 1992–1994 гг. с долей госрасходов от 46 до 57% и с отрицательным темпом роста (то есть со спадом) от –10 до –15% (см. штриховую линию А).



Рис. 3

Но в тогдашнем падении ВВП “виноваты” не государственные расходы, а так называемый “революционный беспредел”. Далее, если взять точки за следующее “успокоительное” четырехлетие 1995–1998 гг., то тенденция (см. штриховую линию В) противоположна “закону” авторов статьи: при росте доли госрасходов от 36 до 42% темп роста ВВП увеличивается (!) с –5% до +1%. Далее идет “постдефолтовское” или “путинское” четырехлетие – с 1999 по 2002 г., соответствующее “закону” Илларионова–Пивоваровой, но в еще более высокой степени (см. штриховую линию С). Причем если его экстраполировать, то при 20% государственных расходов темп роста ВВП может стать фантастическим, равным 17–20%, даже если учесть нелинейность зависимости темпа роста от доли госрасходов. Все это должно было бы заставить авторов быть более внимательными при анализе статистических данных.

Прежде чем давать количественные рекомендации для России, нельзя ограничиваться только статистикой тех или иных стран, необходимо вникнуть в суть экономических механизмов, работающих в разных странах. Это можно проиллюстрировать на следующем примере. Автор настоящей статьи вместе с академиками В. Накоряковым, Л. Абалкиным, Д. Львовым, В. Макаровым, В. Ивантером и другими считает, что для повышения темпа экономического роста в *нынешней*

<sup>3</sup> Рис. 8 из статьи авторов дополнен нами тремя штриховыми линиями, отражающими три периода.

*Р. Нигматулин*

России необходимо увеличить внутренний спрос, повышая долю оплаты труда в ВВП ( $x_2$ ) до 50%, а потом и до 60%. Но для роста экономики Китая, например, это необязательно, хотя там доля оплаты труда в ВВП еще ниже, чем в нынешней России, и составляет около  $x_2 = 20\%$ . Дело в том, что экономика Китая ориентирована на обслуживание мирового рынка товарами потребления низкой и средней технологической сложности. Китаец может и привык жить на 30–50 долл. в месяц. Это преимущество китайских природных условий и традиций и позволяет развивать экономику, ориентируя ее *на экспорт* с низкой долей оплаты труда в стоимости продукции, чтобы на выручку от экспорта и под кредиты под экспорт модернизировать свои производства.

Китай побеждает на мировом рынке дешевизной своих товаров в большой степени за счет очень дешевой, но “послушной” и аккуратной рабочей силы. То же относится и к Таиланду, рассмотренному А. Илларионовым и Н. Пивоваровой в группе, к которой отнесена Россия. Российский житель должен иметь около 200 долл. в месяц, и российская экономика не может конкурировать с китайской по обслуживанию мирового рынка товарами потребления низкой и средней технологической сложности. В отличие от Китая в России недоплаченное за труд и значительная часть природной ренты вместо того, чтобы идти на воспроизводство производительных сил, присваиваются новой буржуазией, которая все это тратит на предметы роскоши или вывозит за рубеж.

Экономика России в отличие от Китая должна “раскрутиться” за счет обслуживания *собственного внутреннего* рынка такими товарами. Поэтому надо особенно заботиться о *поддержании спроса* на внутреннем рынке. Сегодня в конкурентной борьбе на мировом рынке Россия имеет шанс завоевать достойное место *только в секторе высокотехнологичной* продукции с *большой долей интеллектуальных затрат*. Потеряв выпестованные последними столетиями образование и науку, разрушив созданные в XX столетии “кровью и потом” нашего народа высокотехнологичные отрасли (что властная “элита” России делает упорно 12-й год подряд), Россия потеряет и шанс на выход на мировой рынок, и статус великой державы, и свой привычный уровень жизни, и свою цивилизацию.

Однако важна не только доля оплаты труда в ВВП, но и ее структура или равномерность ее распределения, характеризующая, в частности, децильным коэффициентом. Если повышать долю оплаты труда и долю доходов только относительно богатым людям, то это не увеличит спрос на отечественную продукцию – богатые будут покупать импортные товары. Важна и структура производительных сил. В 1980-е годы доля оплаты труда у нас стала высокой – на уровне  $x_2 = 50\text{--}60\%$ , но она не соответствовала тогдашней структуре производительных сил. Аномально большая доля производительных сил, в том числе и оплачиваемого труда (около 40%), была занята не в сфере производства товаров потребления, а в сфере военной продукции. Но все 60% ВВП, выплаченных населению в виде денег (включая и тех, кто производил “нетоварное” оружие), оно направляло на покупку товаров потребления, которых было меньше, чем денег у населения, и страна жила в условиях постоянного дефицита.

Об оптимальной доле государственных расходов в ВВП и темпах экономического роста

При нынешней структуре производства, когда доля занятых на военных заводах существенно снизилась, 50–60% ВВП, отдаваемых населению в виде зарплаты, являлись бы близкими к оптимальному, чтобы переориентировать имеющиеся производительные силы на выпуск товаров потребления. Именно такая доля “заставит” население работать друг на друга, именно к такой доле, характерной, кстати, для индустриальных стран (в США она равна 70%), надо стремиться. Конечно, для предотвращения неконтролируемой инфляции и обвала рубля необходимо вытеснение доллара из отечественной финансовой системы, а на начальном этапе следует принимать меры для защиты отечественного производителя от импорта товаров и избыточного экспорта сырья.

Эти примеры свидетельствуют о том, что при исследовании статистических данных надо вникать в суть вопроса, корректно анализировать влияние всех существенных макроэкономических параметров и условий. И только после этого делать выводы.

Бесспорно, сокращать избыточные расходы государства необходимо, ибо они ложатся бременем на экономику. Если экономику рассматривать в отрыве от жизни общества и государства, то любое сокращение налогов – благо для экономики. Это азбучная истина, которую А. Илларионов и Н. Пивоварова еще раз подтверждают на примере отдельных стран. Но экономика связана с обществом, государством, природными условиями и социальной жизнью общества, геополитическим положением. Своеобразие всех этих связей и условий определяет для каждой страны свою оптимальную долю государственных расходов в ВВП. Кстати, для северных стран (Канады, Норвегии, Швеции, Финляндии) она всегда выше. Конечно, необходимо сокращать государственные расходы на содержание бюрократического аппарата. Актуален и призыв об их снижении на администрирование в экономике, тем более что сегодня в коррумпированной государственной системе России оно чрезвычайно неэффективно. Однако сокращению такого администрирования, отказу от многомиллиардных субсидий в ЖКХ, “льгот”, неэффективных социальных программ должно предшествовать повышение доли оплаты труда в ВВП, чтобы население могло оплачивать коммунальные услуги, транспортные тарифы, продукты питания и т.д., причем без всяких дотаций, расширяющих поле для бюрократической деятельности. Заработная плата россиянина в месяц должна быть не меньше ориентировочно стоимости 400 кг хлеба или 6000 кВт·ч электроэнергии. Но для этого нужен новый экономический порядок.

При нынешнем состоянии России следует *увеличивать* государственные расходы на содержание армии, поддержание правопорядка, на образование, здравоохранение, науку и культуру, иначе мы разрушим наше государство. Делать это надо не путем усиления налогового прессы на реальную экономику с высокой долей трудовых затрат, а за счет разумного увеличения налогов на сверхдоходы богатых. Необходимо кратное повышение отчислений государству природно-ресурсной ренты, налогов на собственность “элитного” класса и т.д.

В заключение следует отметить, что рекомендации научных работников в области макроэкономики России должны проходить более тщательную проработку и обсуждение.



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

Nuclear Engineering and Design 235 (2005) 1079–1091

**Nuclear  
Engineering  
and Design**[www.elsevier.com/locate/nucengdes](http://www.elsevier.com/locate/nucengdes)

# Nano-scale thermonuclear fusion in imploding vapor bubbles

Robert Nigmatulin

*Institute of Mechanics, Ufa Branch of the Russian Academy of Science, 6 Karl Marx Street, Ufa 450000, Russia*

Received 13 January 2005; received in revised form 14 January 2005; accepted 16 February 2005

The paper is dedicated to Dr. Richard T. Lahey Jr., on the occasion of his 65th birthday.

## Abstract

This paper presents the specific features of violent vapor cavitation bubble implosion induced by an energetic acoustic standing wave in the Oak Ridge National Laboratory (ORNL) experiments performed using deuterated acetone [Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Cho, J.S., Lahey Jr., R.T., Nigmatulin, R.I., Block, R.C., 2002. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation. *Science* 295, 1868; Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Cho, J.S., Lahey Jr., R.T., Nigmatulin, R.I., Block, R.C., 2004. Additional evidence of nuclear emissions during acoustic cavitation. *Phys. Rev. E* 69, 036109]. A detailed description and analysis of these data, including a resolution of the criticisms that have been raised, has been given by Nigmatulin et al. [Nigmatulin, R.I., Taleyarkhan, R.P., Lahey Jr., R.T., 2002. The evidence of thermonuclear fusion  $D+D$  during acoustic cavitation. In: *Vestnik ANRB*, No. 4. Ufa, Bashkortostan, Russia; Nigmatulin, R.I., Taleyarkhan, R.P., Lahey Jr., R.T., 2004. The evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation revisited. *J. Power Energy* 218-A, 345] and Lahey et al. [Lahey Jr., R.T., Taleyarkhan, R.P., Nigmatulin, R.I., Akhatov, I.S. Sonoluminescence and the search for sonofusion. In: *Advances in Heat Transfer*, vol. 39. Academic Press, in press].

The results presented in this paper are found based on the numerical simulations of the bubble implosion phenomena. A more detailed description of the equations for the mathematical modeling of the phenomena has been given by Nigmatulin et al. (2005).

© 2005 Published by Elsevier B.V.

## 1. Introduction

The results of detailed HYDRO code simulations of the spherically symmetric dynamics of a non-condensable gas bubble in an acoustic field were presented by Moss et al. (1994, 1996). Typical sim-

ulations for single bubble sonoluminescence (SBSL) forced by a standing acoustic field with a frequency of 20–40 kHz, and amplitude of about 1 bar, were considered. In this case, a non-condensable bubble grew from a radius of about 4.5  $\mu\text{m}$  to about 44  $\mu\text{m}$  during the acoustic expansion phase and then imploded to a radius of about 0.3  $\mu\text{m}$  during the acoustic compression phase. During the final stage of bubble implosion,

*E-mail address:* [nigmar@anrb.ru](mailto:nigmar@anrb.ru).

which lasts only about  $10^{-3}$   $\mu\text{s}$  (out of the 50–25  $\mu\text{s}$  acoustic driving period), a shock wave may be initiated from the interface, which accelerates towards the bubble's center. This shock wave intensifies (i.e., cumulates) toward, and reflects from, the center of the bubble, compressing and heating the gas there to very high pressures and temperatures. Also at this instant, a high density, ionized gas core is formed near the bubble's center. According to Moss' calculations, the radius of this core is about  $10^{-9}$  m, and the extreme conditions last for a time interval of about  $10^{-11}$ – $10^{-10}$  s. The temperature of the ions in the core attain a density of  $\rho_{\text{max}} \approx 10 \text{ g/cm}^3$ , and temperature of  $T_{\text{max}} \approx 10^6$  K, while the temperature of the electrons that define the light emission, and many of the energy loss mechanisms, was about three times less.

We note that such large temperatures in the highly compressed central gas core of the bubble are accomplished by the conversion into the gas internal energy of a part of the kinetic energy of the liquid, which is accelerated towards bubble's center by the acoustic field. The higher the liquid's kinetic energy, the stronger the compression and heat-up of the central core region.

The goal of the ORNL bubble fusion experiments (Taleyarkhan et al., 2002, 2004) was to achieve at least a two orders of magnitude increase in peak temperature (i.e., to  $\sim 10^8$  K) compared to typical sonoluminescence experiments, thus creating conditions suitable for thermonuclear fusion. In order to achieve this, a fundamental change in experimental technique was made, which allowed one to increase many times the kinetic energy of the liquid accelerated toward the bubble's center thus greatly enhancing the effect of cumulative shock wave compression. In particular:

- (1) An order of magnitude higher amplitude of the standing acoustic field was used, namely: instead of the traditional 1–1.5 bar used in SBSL experiments, more powerful acoustic fields with amplitudes of 15 bar or more were applied. To do this one was forced to overcome two difficulties. First was to find a test liquid, which could be put into significant tension (i.e., –15 bar) before cavitation, which was induced at the proper moment of acoustic rarefaction using high-energy neutrons. Second, to create and focus such intense acoustic fields within a small region of the test liquid.
- (2) Unlike SBSL, where non-condensable gas bubbles are used, in bubble nuclear fusion experiments vapor cavitation bubbles were used. That is, the bubbles formed were filled with vapor of the surrounding liquid. For vapor bubbles the cushioning of the implosion due to the increasing pressure of the compressed vapor can be minimized. That is, due to vapor condensation at bubble's interface, as the vapor bubble implodes the vapor pressure stays essentially constant until the final stage of collapse. This greatly reduces the cushioning of the vapor compression process and increases the peak pressure, density and temperature.
- (3) The test liquid used at ORNL was well-degassed, deuterated organic liquid acetone ( $\text{C}_3\text{D}_6\text{O}$ ). Each molecule of D-acetone contains six deuterium nuclei, which may undergo thermonuclear fusion reaction at high enough temperatures and densities. Acetone also possesses high cavitation stability; that is, it can withstand high-tension states in liquid without premature cavitation. Moreover, organic liquids, such as acetone, also have relatively high accommodation (i.e., condensation/evaporation) coefficients, which, together with a sufficiently low liquid pool temperature, promote intensive vapor condensation during bubble implosion. In addition, due to a relatively high molecular weight,  $M$  ( $M=64$  for D-acetone), and low adiabatic exponent  $\gamma$  (i.e.,  $\gamma=1.125$  for acetone vapor), organic vapor has a fairly low speed of sound ( $C_G = \sqrt{(\gamma R/M)T}$ ), which, for fixed liquid implosion speeds, leads to the formation of stronger shock waves than in some other gases and vapors of potential interest. In addition, a low  $\gamma$  promotes a higher maximum compression in the shock wave within the bubble  $(\gamma+1)/(\gamma-1)$ .

In this paper we present a mathematical model that describes and explains the experimental observations at ORNL of thermonuclear fusion for an imploding cavitation bubble in chilled, deuterated acetone (Taleyarkhan et al., 2002, 2004).

The equations include gas dynamic equations with thermal conductivity, realistic equations of state<sup>1</sup> for the liquid and vapor acetone taking

<sup>1</sup> The equations of state used herein were derived by R. Bolotnova (RAS).



into account inter-molecular or inter-ion interactions (Zeldovich and Raizer, 1966; Walsh and Rice, 1957; Nigmatulin, 1991), equations for non-equilibrium evaporation/condensation kinetics at the liquid/vapor interface (Nigmatulin, 1991), dissociation, ionization and other related plasma physics phenomena (Zeldovich and Raizer, 1966) during the final stage of bubble collapse. A more detailed discussion of these models is given by Nigmatulin et al. (2005).

In order to estimate the production of fusion neutrons, the neutron kinetics model given by Duderstadt and Moses (1981), Gross (1984) and Bosh and Hale (1992) was used in conjunction with the local, instantaneous HYDRO code's thermal-hydraulic evaluations during the bubble implosion process:

$$J_n = J_T = \frac{1}{2} \langle \sigma v \rangle (n_D)^2 \quad (1.1)$$

where  $J_n$  and  $J_T$  are the numbers of 2.45 MeV D/D fusion neutrons and tritium nucleus, respectively, produced per unit time and unit volume,  $n_D$  the concentration of the deuterons per volume unit and  $\langle \sigma v \rangle$  is the weighted cross section for the fusion reaction, which strongly depends on temperature. The number of D/D thermonuclear neutrons or tritium nucleus produced per implosion period of the acoustic field may be calculated by integration over the volume of the bubble and the time of the period,  $2\pi/\omega$ , of the acoustic field:

$$N = \int_0^{2\pi/\omega} dt \int_0^a 4\pi r^2 J_n dr = \int_0^a N_r dr; \quad (1.2)$$

$$N_r(r) = 4\pi r^2 \int_0^{2\pi/\omega} J_n dt,$$

where  $N_r(r)$  is the distribution function of neutron production within the bubble.

The equations of a two-phase bubbly liquid (Nigmatulin, 1991) for analyzing the pressure intensification process within an imploding bubble cluster were also used.

A one-dimensional spherical symmetrical approximation was used to analyze the implosion process. Evolution of the disturbances of the spherical shape of the imploding bubble was also investigated and validity of the spherical approximation was verified (Lahey et al., in press).

This model describes cavitation bubble growth during an expansion period, followed by a violent im-

losion during the compression period of the acoustic cycle similar to single bubble sonoluminescence (Margulis, 2000; Moss et al., 1994, 1996; Nigmatulin et al., 1999a,b; Lahey et al., in press).

There are two basic stages of the process (Nigmatulin et al., 1999a,b). The first, low Mach number stage, is when the radial velocities are much less than the sound speeds in the vapor and liquid. In this stage, the vapor pressure is uniform and very close to saturation and the liquid is practically incompressible. This process is characterized by the inertia of the liquid, heat conduction and evaporation or condensation of the vapor. The second, high Mach number, stage is when radial velocities are the same order or higher than the sound speeds in the vapor and liquid. In this stage, high temperatures, pressures and densities of the vapor and liquid may take place. During the final stage strong compression and shock waves are initiated (Moss et al., 1994, 1996). They converge toward, and reflect from, the center of the bubble. For a vapor bubble in a deuterated organic liquid (e.g., acetone), during the final stage of collapse there is a nano-scale region (diameter  $\sim 100$  nm) near the center of the bubble in which, for a fraction of a picosecond, the temperatures and densities are extremely high ( $\sim 10^8$  K and  $\sim 10$  g/cm<sup>3</sup>) such that thermonuclear fusion may take place.

Numerical HYDRO code simulations of the bubble implosion process for the experimental conditions used have been carried out. The results show good agreement with the ORNL experimental data on bubble fusion that was measured in chilled deuterated acetone (Taleyarkhan et al., 2002, 2004).

To distinguish the parameters of the different phases and components, subscript 'k' will be used, where k = L denotes the liquid and k = G denotes gas/vapor. Subscript 'S' will be used to denote the saturation (vapor/liquid) state (e.g.,  $p_S$ ,  $\rho_{LS}$ ,  $\rho_{GS}$ ) and subscript '0' will be used for the initial ( $t=0$ ) state at rest (e.g.,  $a_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_{L0}$ ,  $\rho_{G0}$ ). The subscript 'a' denotes the parameters on the interface (i.e.,  $r=a$ ) of the bubble ( $p_a$ ,  $T_a$ ,  $\rho_{La}$ ,  $\rho_{Ga}$ ).

## 2. Cavitation bubble clusters in an acoustic field

In the ORNL experiments (Taleyarkhan et al., 2002, 2004) the impressed standing acoustic field acted on a cluster of bubbles consisting of  $\sim 1000$  bubbles.

The initial radius of the bubble cluster was around  $R \approx 4$  mm. The measured pressure amplitude of the acoustic field (e.g.,  $\Delta p = 15$  bar) was the incident pressure on the periphery of the bubble cluster but not on the bubbles near the center of the cluster. The bubbles in the central region of the cluster may be subjected to a much higher compression pressure than the peripheral bubbles because of multi-bubble dynamics. This dynamics induces a significant amplification of the compression wave (Nigmatulin, 1991). For a spherical bubble cluster the focusing and intensification of compression waves was investigated numerically by Wang and Brennen (1994), Matsumoto (2000), Shimada et al. (2000) and Kedrinskiy (2000). The two-dimensional amplification of the compression waves in bubbly liquids were also investigated by Nigmatulin et al. (2001).

In our investigation<sup>2</sup> a spherical bubble cluster with spherical bubbles, which is surrounded by a non-compressible liquid subjected to harmonic incident pressure oscillations in a standing acoustic wave field ( $\Delta p = 15$  bar) was considered. It is the low Mach number stage that is important for the accumulation of the kinetic energy of the liquid.

The cluster was considered as two fluid continua with two pressures (Nigmatulin, 1991). The first one is an averaged, or macroscopic, pressure in the liquid,  $p$ , which can be identified as the incident pressure for the bubbles. The second one is the pressure in the bubbles,  $p_G$ .

Numerical calculations were made when the cluster ( $R_0 = 4$  mm) was initially uniform with void fraction  $\alpha_{G0} = 0.04$  corresponding to 1000 bubbles of radius  $a_0 = 300$   $\mu\text{m}$ . Then on the boundary of the bubble cluster ( $r = R(t)$ ) the incident pressure,  $p(t)$ , corresponded to the compression part of a sinusoidal excitation with amplitude 15 bar. A compression wave propagated to the center of the cluster initiating compression of the bubbles. The compression wave was led by an elastic precursor with sound speed  $C_L$  in pure liquid. Then the main wave followed initiating the collapse of the bubbles. In Fig. 1, an evolution of the liquid pressure  $p(t)$  at four radial positions within the cluster:  $r = R$ ,  $0.65R$ ,  $0.33R$ ,  $0.0$ . It is seen that the reflection of the waves from the center of the cluster, where the radial velocity is zero, produces very strong amplification of

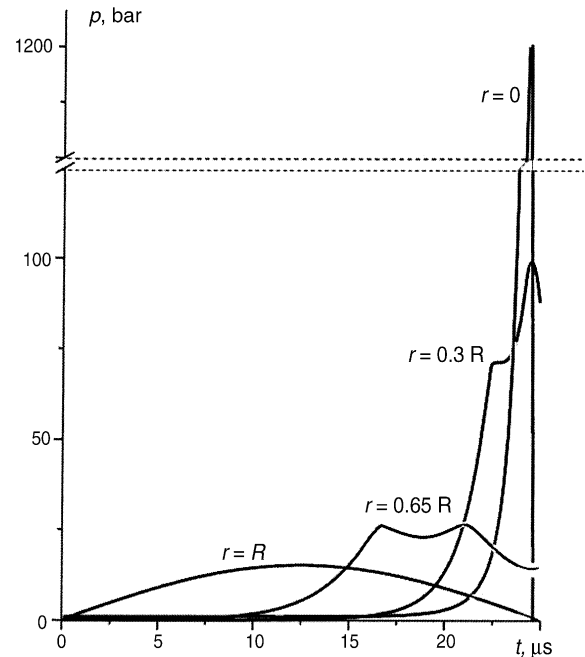


Fig. 1. The evolution of liquid pressure within an imploding bubble cluster at different radii,  $r$  (shown by the corresponding labels), for a cluster with 1000 bubbles ( $a_0 = 300$   $\mu\text{m}$  and  $\alpha_{G0} = 0.042$ ) subjected to a 15 bar compression pressure on the boundary of the bubble cluster ( $r = R$ ).

the pressure and concentrates it during a short period of time.

### 3. Bubble coalescence within the cluster

Investigation of the incident pressure evolution in bubble clusters being forced by the acoustic pressure field shows that the rarefaction in the cluster is less than the incident acoustic pressure ( $-15$  bar), but the compression impact of the incident pressure is much higher and of shorter duration (see Fig. 1). During the smaller rarefaction period the maximum bubble radius in the cluster reaches only 100–300  $\mu\text{m}$ . This is too small to have an effective cumulation of the compression wave in the bubble and to produce a thermonuclear central core in the imploded bubble.

One of the possible mechanisms leading to larger bubble sizes is coalescence of bubbles. Thus, let us estimate the time, which is needed for the interior bubbles to coalesce. The bubble coalescence process in the bubble clusters is controlled by liquid film drainage

<sup>2</sup> This investigation was done by N. Vakhitova (RAS).



dynamics between adjacent bubbles. Eventually, the film drainage is driven by surface tension forces and is limited by liquid inertia. Our estimations (Nigmatulin et al., 2005) show that the time, which is needed for the liquid film to drain sufficiently to have bubble coalescence, is  $\sim 2 \mu\text{s}$ . That implies that bubbles within an expanding bubble cluster have sufficient time to coalesce.

It was estimated that during the growth phase of the bubble cluster, about 10–20 small bubbles (with radius  $a_f$ ) coalesce forming larger bubbles of radius  $a = 600\text{--}800 \mu\text{m}$ . This size bubble provides effective focusing of the subsequent shock waves leading to thermonuclear conditions in the central region of the imploding bubbles. If there were initially 1000 bubbles in the cluster after coalescence we would have 50–100 larger bubbles, which would be compressed by the pressure transient within the cluster shown in Fig. 1.

The wave length,  $\Lambda$ , of the initial disturbances to the spherical shape of the large bubbles due to the coalescence of many small bubbles is on the order of the size of small bubbles  $2a_f$  (i.e., these disturbances are relatively short wave disturbances,  $\Lambda \sim 2a_f \ll 2a$ ). It has been shown (Nigmatulin et al., submitted for publication) that these disturbances do not grow because of the liquid viscosity and surface tension. As to the long wave disturbances ( $\Lambda \sim 2a$ ) they do not disturb the spherical shape of the bubble during implosions if the initial value of the perturbation,  $\delta a^\circ$ , is small enough (Nigmatulin et al., submitted for publication):

$$\delta a^\circ / 2a \leq 10^{-2}. \quad (3.1)$$

#### 4. Implosion of the bubbles

To simulate the ORNL experiments of Taleyarkhan et al. (2002, 2004) a single cycle of the vapor bubble dynamics in D-acetone under the influence of a periodic acoustic field was considered.<sup>3</sup> The impressed pressure was given by

$$p_1 = p_0 + \Delta p_1 \sin(2\pi\omega t); \quad p_0 = 1 \text{ bar}, \\ \Delta p_1 = 15 \text{ bar}, \quad (4.1)$$

which corresponds to the acoustic forcing in the experiment.

Since the liquid pressure can strongly increase when the acoustic wave interacts with the bubble cluster (see Section 3) we assumed two compression laws. The first one is that the incident pressure,  $p_1$ , for the bubble under consideration in the central region of the cluster varies according to the same sinusoidal form as in (4.1) but, due to pressure intensification mechanisms, with higher amplitude,  $\Delta p_2 = 50 \text{ bar}$ , during the compression period.

The second compression law used the pressure intensification shown in Fig. 1. This compression impact on the bubble ( $a_{\text{max}} = 600\text{--}800 \mu\text{m}$ ) is much shorter ( $\Delta t \approx 1\text{--}5 \mu\text{s}$ ) but is also much stronger ( $\Delta p \approx 100\text{--}1000 \text{ bar}$ ).

Fig. 2 presents the time evolution of the bubble's radius,  $a$ ; interface velocity,  $da/dt \equiv \dot{a} \approx w_{La}$ ; vapor mass,  $m_G$ ; uniform pressure in the bubble,  $p_G$ ; the density  $\rho_G(r=0)$  and temperature  $T_G(r=0)$  at the center of the bubble, for a single cycle of bubble growth and implosion during the low Mach number stage.

Fig. 3 presents the time evolution of the bubble radius,  $a$ ; wall velocity,  $w_{La} \approx \dot{a}$ ; pressure,  $p_{La}$ ; density,  $\rho_{La}$ ; temperature,  $T_{La}$ , on the interface ( $r=a$ ) during the final stage of bubble implosion at high Mach number.

On the curves  $a(t)$  (Figs. 2 and 3) some points (i.e., 1, 2, ..., 8) are marked. Below the corresponding moments are denoted by  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ .

The maximum values of the velocity, pressure, temperature and density of the liquid are on the interface, and they reach  $w_{La} \approx 2 \text{ km/s}$ ,  $p_{La} \approx 0.5 \text{ Mbar}$ ,  $T_{La} \approx 2500 \text{ K}$ ,  $\rho_{La} \approx 2200 \text{ kg/m}^3 \approx 2.5\rho_{L0}$ . The duration around this state of the interface is  $\sim 5\text{--}10 \text{ ns}$ .

Temperature distributions during bubble expansion and early collapse (the microsecond stage) are characterized by a very thin temperature boundary layer in the liquid near the interface due to a rapid drop of the temperature on the interface during expansion of the vapor changing to an extremely fast increasing temperature on the interface during the implosion that induces compression of the vapor. The thickness of this boundary layer may be estimated by  $\delta_L \sim \sqrt{D_L t}$ , where  $D_L \approx 0.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  is the thermal diffusivity of the liquid acetone. A drop in the temperature at the interface ( $T_a \approx T_S(p)$ ) takes place because of bubble expansion until  $t \approx 30 \mu\text{s}$ , which gives  $\delta_L \sim 2 \mu\text{m}$ .

<sup>3</sup> All calculations in this section were made by A. Toplnikov (RAS).

1084

R. Nigmatulin / Nuclear Engineering and Design 235 (2005) 1079–1091

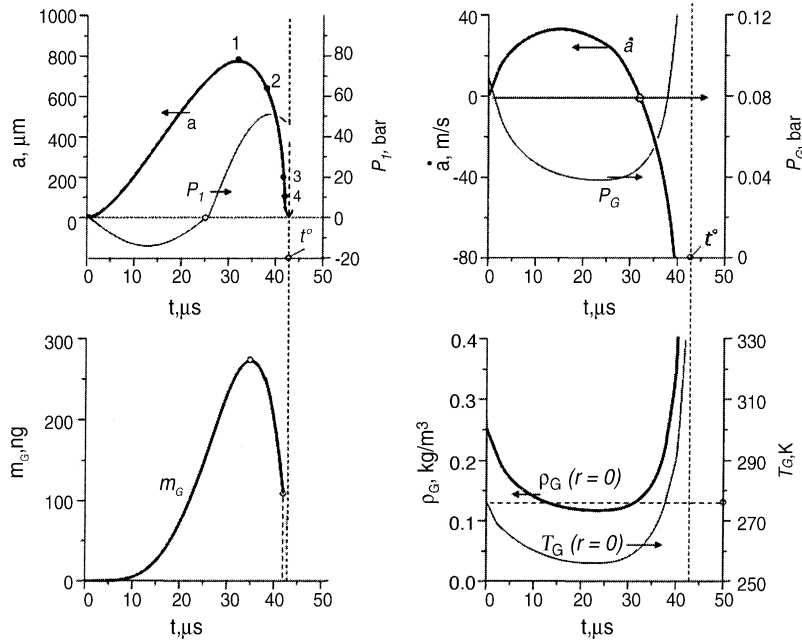


Fig. 2. The vapor bubble parameters (radius of the bubble,  $a$ ; interface radial velocity,  $\dot{a}$ ; mass of the vapor in the bubble,  $m_G$ ; pressure,  $p_G$ ; density  $\rho_G(r=0)$ ; temperature  $T_G(r=0)$  in the center of the bubble as functions of time for the low Mach number (microsecond) stage. Dots and their numbers 1–4 correspond to times,  $t_n$  ( $n=1-4$ ;  $t_1=31.9 \mu s$ ,  $t_2=38.0 \mu s$ ,  $t_3=41.7 \mu s$  and  $t_4=41.9 \mu s$ ), which are mentioned in the text.

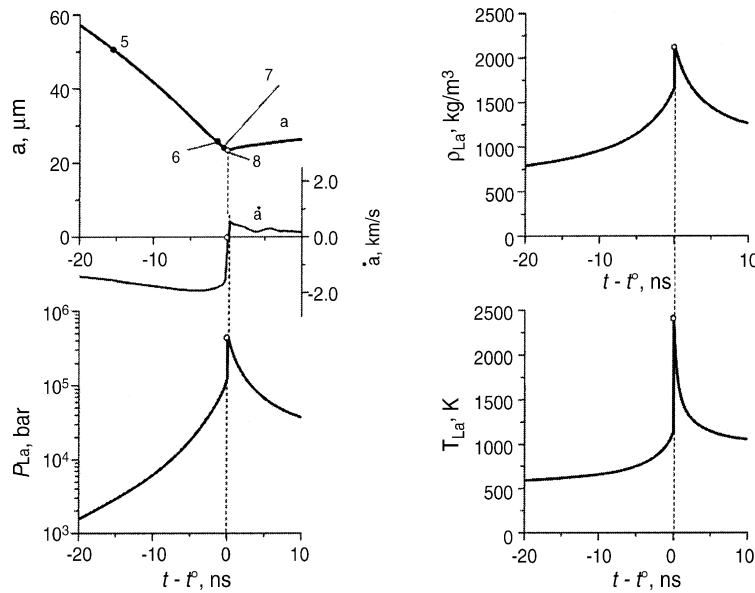


Fig. 3. Evolutions of the bubble radius,  $a$ ; interface radial velocity,  $\dot{a}$ ; liquid parameters at the interface during final nano-second (high Mach number) stage of bubble implosion ( $t^o = 41.9932 \mu s$  is the time corresponding to the minimum bubble radius). Solid dots and opened circle and their numbers 5–8 correspond to times,  $t_n$  ( $n=5-7$ , 8;  $t_5=t^o - 15 ns$ ,  $t_6=t^o - 1.9 ns$ ,  $t_7=t^o - 0.78 ns \approx t^*$  and  $t_8=t^o$ ), which are mentioned in the text. The open circle 8 corresponds to the minimum bubble radius.

But the divergent flow of the non-compressible liquid (when  $a(t)$  is growing) makes it even thinner (i.e., proportional to  $a^{-2}$ ), thus:

$$\delta_L \sim \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-2} \sqrt{D_L t}. \quad (4.2)$$

Actually, we have  $\delta_L/a \sim 10^{-3}$ . That is why the temperature profile in the liquid looks like a jump adjacent to the interface. The bubble collapses after  $t_1$  and the interface temperature,  $T_a$ , increases rapidly during only about 4  $\mu\text{s}$ . The thermal boundary layer, with liquid temperature falling from the interface, would be about three times thinner, but the spherically convergent flow (when  $a(t)$  is getting smaller) makes it thicker and proportional to  $a^{-2}$ .

The thickness of the temperature boundary layer in the compressible vapor is  $\delta_G \sim \sqrt{D_G t}$  (where  $D_G \approx 53 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  is a temperature diffusivity of the vapor), and during bubble expansion (i.e., until  $t \approx 30 \mu\text{s}$ ) the thickness of the temperature boundary layer when the temperature in the vapor falls from the interface to the center of the bubble is much thicker:  $\delta_G \sim 40 \mu\text{m}$ . However, the rapid contraction of the vapor with the growth of the temperature takes place during  $t \sim 1 \mu\text{s}$ , and the thickness of the boundary layer in the gas with the temperature falling to the interface becomes very thin as in the liquid (i.e.,  $\delta_G \sim 7 \mu\text{m}$ ). Subsequently, non-uniform profiles of temperature in the gas and in liquid are formed.

A critical point at the interface takes place at the moment  $t_4 = t^\circ - 70 \text{ ns}$  (i.e., 70 ns before the radius of the bubble is minimal) when radius of the bubble,  $a \approx 110 \mu\text{m}$ , velocity of the interface,  $w_{La} = w_{Ga} \approx -800 \text{ m/s}$  and pressure in the bubble are no longer uniform, but there is not yet a shock. At this moment condensation stops because the liquid and vapor temperature on the interface becomes supercritical ( $p \geq p_{cr} = 46 \text{ bar}$ ,  $T \geq T_{cr} = 508 \text{ K}$  and there is no longer any difference between vapor and liquid).

During the subcritical phase of the bubble implosion more than half of the evaporated vapor mass ( $m_G \approx 260 \text{ ng}$ ) condenses. The final mass of vapor ( $m_G \approx 100 \text{ ng}$ ) after the transition to a supercritical fluid remains constant and the bubble keeps on contracting from  $a \approx 110 \mu\text{m}$  to the minimal bubble radius  $a_{\min} \approx 24 \mu\text{m}$  (see Fig. 3), as compared to the minimum radius of 0.3–1  $\mu\text{m}$  in typical SBSL experiments

(Moss et al., 1994). Significantly, the corresponding mass of the compressed gas (vapor) is  $10^5$ – $10^6$  times larger than in typical SBSL experiments.

At moment  $t \approx t_3$  the pressure distribution becomes non-uniform (i.e., the homobaricity assumption is no longer valid) and intensive continuous compression occurs when the pressure at the interface ( $r=a$ ) is 3.7 times larger than at the center of the bubble ( $r=0$ ). After that (less than 0.2  $\mu\text{s}$  later) the formation of a strong continuous compression wave takes place at  $t \approx t_4$ . After less than 60 ns this wave is transformed into a strong shock (jump) at  $t \approx t_5$ .

The intensity of the shock (i.e., the pressure, temperature and velocity after the shock) increases on its converging to the center of the bubble, but the ratio of the density after the shock ( $\rho_+$ ) to the density before the shock ( $\rho_-$ ) tends to a maximum value (Landau and Lifshitz, 1988; Rakhmatulin, 1983), which for molecular acetone vapor with a low adiabatic exponent of  $\gamma_m = 1.125$  is<sup>4</sup>:

$$\frac{\rho_+}{\rho_-} \rightarrow \left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right)_{\max} = \frac{\gamma_m + 1}{\gamma_m - 1} = 17.0. \quad (4.3)$$

However, after the shock a continuous compression wave follows to the center of the bubble. The compression shock wave with the trailing continuous compression wave qualitatively corresponds to the self-similar solutions for the spherically symmetrical flow of a perfect gas converging to the origin from infinity (Guderley, 1942) with a leading shock wave. This theoretical solution gives the intensity of a converging shock wave with the pressure and temperature tending to infinity at the moment of the reflection from the center. However, dissipation processes due to viscosity, dissociation, ionization, photon emissions and thermal conductivity mitigate the compression process so that the pressure and temperature remain finite.

The leading compression shock wave is focusing and approaching the bubble's center at time moment  $t = t_7$ , and a trailing compression wave, which is much stronger, reaches and reflects from the center at time  $t = t_7 + 0.28 \text{ ps}$  (i.e., during a fraction of a picosecond). The calculations show that it is in this time interval (i.e., 0.28 ps) when the maximum neutron production

<sup>4</sup> The maximum values of compression by a shock wave for monatomic ( $\gamma_m = 7/3$ ) and diatomic gas ( $\gamma_m = 7/5$ ) equal 4 and 6, respectively.

is produced. During this time, reflections of these waves from the center and interaction with each other takes place.

A thermal precursor is formed before the compression shock due to the increased thermal conductivity with temperature (i.e., the thermal conductivity increases as  $T^{1/2}$ ), and it becomes important near the bubble's center when the shock-induced temperature is higher than  $10^6$  K. This precursor increases the temperature and pressure but does not cause fluid motion (i.e.,  $w \approx 0$ ) and change of density. In contrast, arrival of the compression shock initiates a high-speed flow ( $w > 100$  km/s). As a result the thermal precursor smears the shock wave front somewhat when the pressure and temperature fronts are ahead of the density and velocity shock which is called an "isothermal jump" (Zeldovich and Raizer, 1966; Landau and Lifshitz, 1988).

The numerical calculations show that neutron emissions originate from the central zone of the bubble, which has a radius of about 60 nm (Fig. 4). There is a radius,  $r = r^*$ , where the maximum neutron production,  $N_r$  (see Eq. (1.2)), takes place. This maximum is explained by the interplay of two factors: closer to the center of the bubble the maximum temperature and density are larger, but there is less material there (i.e., the multiplier is  $r^2$  in Eq. (1.2) for  $N_r$ ) and the time duration is shorter. This maximum corresponds to a radial coordinate  $r^*$ , which equals  $r^* \approx 27$  nm. The radius of

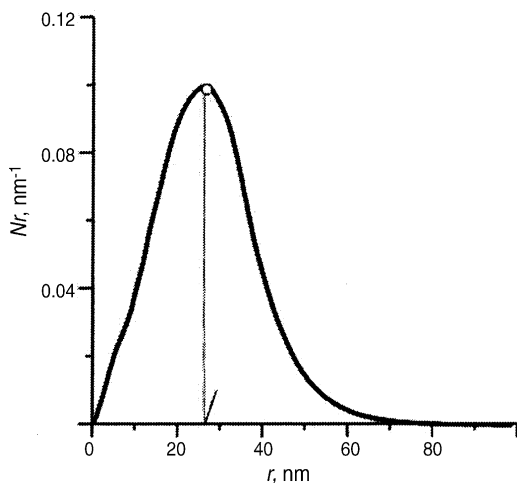


Fig. 4. The radial distribution of neutron output,  $N_r(r)$ . The thick line depicts an ionized vapor and the thin line a non-ionized vapor.

the dissociated gas core is about  $1.5 \mu\text{m}$  and the radius of the fully ionized gas core is about 200 nm. The dissociation and ionization takes place in these regions less than 2 ns after  $t_7$ .

The state of the dense plasma with extremely high temperature and density that can produce thermonuclear fusion ( $T \sim 10^8$  K,  $\rho \sim 10 \text{ g/cm}^3$ ), takes place only in a very small zone,  $r < 60$  nm, near the center of the bubble of radius  $a \approx 27 \mu\text{m}$ . Thus, it is necessary to use a very fine computational grid in the central zone.

The distribution of the neutron production function,  $N_r(r)$  in Fig. 4, shows that the zone  $r < 5$  nm does not produce many neutrons and thus this zone does not need to be considered in detail (using grids smaller than 0.1 nm).

Mathematically, the kinetics of the cumulative neutron emission,  $N$ , is a numerical convolution of the singularity at  $r = 0$  at the moment of the reflection of the shock wave from the center, where the temperature is near infinite. This convolution makes it possible to calculate numerically by finite difference equations the neutron emission in spite of a temperature spike at the bubble's center.

The values of the parameters at the location of the maximum neutron production are denoted by superscript  $*$ :

$$\begin{aligned} T^* &= T(t, r^*), & p^* &= p(t, r^*), \\ \rho^* &= \rho(t, r^*). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Besides the initial moment of the time ( $t = 0$ ), when the growth of the bubbles was initiated, two other moments of the time are important. The first was the moment  $t^\circ = 41.9932$  ns when the bubble reaches its minimum radius ( $a = a_{\text{min}}$ ), and the second moment was at time  $t^* = t^\circ - 0.7823$  ns  $\approx t_7$  (see Fig. 3), when the temperature at the radius of the maximum neutron (and tritium) production ( $r = r^*$ ) reaches its maximum value ( $T^* = T_{\text{max}}^*$ ). The time relative to this moment,  $(t - t^*)$ , in picosecond and sub-picosecond intervals is shown in Fig. 5. In this figure, the evolution of density  $\rho^*$ , pressure  $p^*$ , temperature  $T^*$  at  $r = r^*$  are shown.

According to these calculations the evolution of the density of the gas in the central core takes place in five stages. The first stage ( $t - t^*$  is from  $-42$  to  $-15 \mu\text{s}$ ) is a homobaric relatively slow expansion when  $\rho_G$

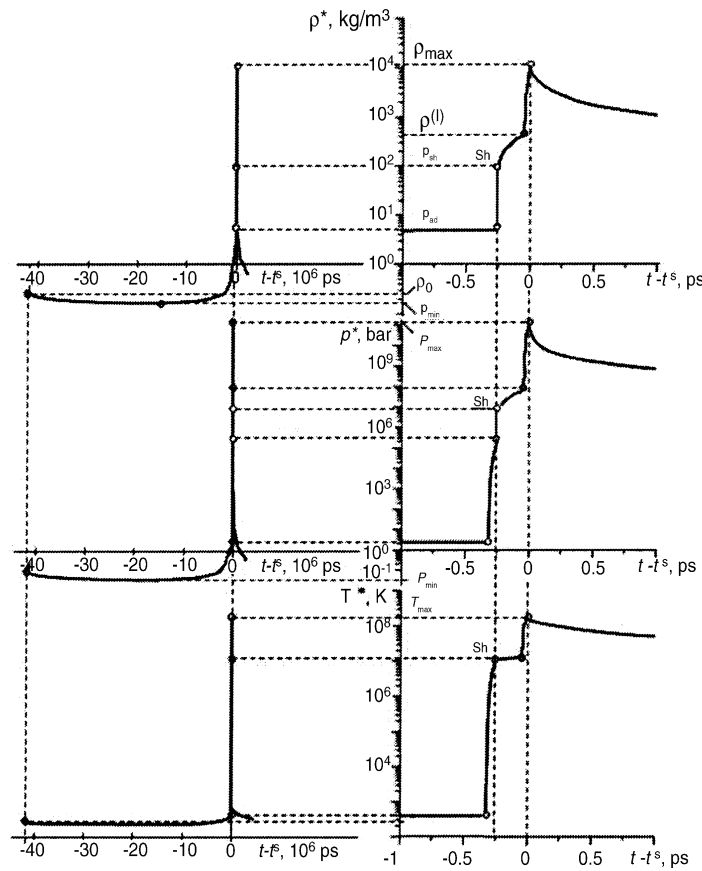


Fig. 5. Temporal distributions of density, pressure and temperature of the gas corresponding to the radial location of maximum neutron production ( $r=r^*$ ) during subpicosecond high Mach number stage.

falls from  $\rho_0 = 0.25 \text{ kg/m}^3$  to  $\rho_{\min} = 0.13 \text{ kg/m}^3$ . The second stage ( $t-t^*$  is from  $-15 \mu\text{s}$  to  $0.0$ ) is a relatively slow continuous accelerating compression when  $\rho_G$  grows from  $\rho_{\min} = 0.13 \text{ kg/m}^3$  to  $\rho_{\text{ad}} = 4.8 \text{ kg/m}^3$ . This stage is practically isentropic (i.e., adiabatic). The third stage is the compression due to the leading shock wave (labeled by Sh in Fig. 5) where the density increases by a factor of  $\rho_{\text{Sh}}/\rho_{\text{ad}} = (\rho_+/\rho_-)_{\text{max}} = 17$ . The fourth stage is a compression of  $\rho^{(4)}/\rho_{\text{Sh}} \approx 5.9$  due to a continuous (during a  $0.2 \text{ ps}$ ) time interval compression wave after the leading shock wave. This is similar to the Guderley solution. The fifth stage is a large compression  $\rho_{\text{max}}/\rho^{(4)} \approx 24$  due to the interaction of the reflected leading shock wave from the center with a following continuous compression wave in the monatomic plasma. This stage is of very short duration,  $\Delta t^{(5)} \sim 0.05 \text{ ps}$ , but it is not a compression by a single shock wave because the maximum compression of a

monatomic gas ( $\gamma = 5/3$ ) due to a shock wave is only  $(\rho_+/\rho_-)_{\text{max}} = 4$ . The fifth stage occurs at  $r=r^*$  about  $0.2 \text{ ps}$  later than the fourth stage. During all these five stages the compression of the gas in the central core is very large,  $\rho_{\text{max}}/\rho_{\min} \approx 77,000$ .

The calculations show that the focusing of the shock wave leads to an extreme rise of density (to about  $\rho^* \sim 10^4 \text{ kg/m}^3$ ), pressure (up to  $p^* \sim 10^{11} \text{ bar}$ ) and temperature of the vapor/plasma ( $T^* \sim 2 \times 10^8 \text{ K}$ ). Moreover, the maximum particle velocity near the bubble's center reaches  $w^* \approx 600 \text{ km/s}$ , and this state takes place during only  $\Delta t^* \sim 0.05\text{--}0.1 \text{ ps}$ , so that the displacement of plasma particles  $w^* \Delta t^* \sim 30 \text{ nm}$ , is very small. Indeed, it looks almost like "infinite speed ( $w^* = \infty$ ) during a zero time interval ( $\Delta t^* = 0$ )".

It is important to note that the number of the nucleus in the thermonuclear core always exceeds  $10^9$ . Thus, the highly compressed core region may be analyzed

using a continuum approximation, however, the thermal conductivity should reflect the ion/ion interactions, and that it is thus much larger than the molecular thermal conductivity.

The calculations show that D/D thermonuclear fusion takes place during about 0.5 ps. For the sinusoidal incident pressure evolution with  $\Delta p_1 = 15$  bar and  $\Delta p_2 = 50$  bar this procedure gives:

$$N \approx 3 \text{ neutrons per bubble per implosion.} \quad (4.5)$$

When there is no ionization, we obtain  $N \approx 3.7$ . A more realistic evaluation of the incident compression pressure in the center of the bubble cluster (see Fig. 1) yields:

$$N = 12 \text{ neutrons per bubble per implosion.} \quad (4.6)$$

Moreover, the calculations (see Fig. 6) show that increasing the liquid temperature from  $T_{L0} = 273$  K to  $T_0 = 293$  K, or the use of a small accommodation

(i.e., condensation) coefficient,  $\alpha$ , significantly decreases the number of the emitted D/D thermonuclear neutrons (e.g.,  $N \approx 1\text{--}2$  neutrons/bubble/implosion for  $T_{L0} = 293$  K,  $\alpha \sim 0.2$ ), which corresponds to experimental findings (Taleyarkhan et al., 2002, 2004). This seeming paradox can be easily explained. For higher pool temperatures the saturation pressure is higher (i.e.,  $p_S(293 \text{ K}) \approx 3.5 p_S(273 \text{ K})$ ), thus the mass of the vapor generated during bubble expansion is a few times larger than at 273 K. Also, vapor condensation is reduced since the liquid pool is not as cold. As a result the pressure of the vapor during the compression of the bubble becomes higher than for a cooler liquid pool and the final interface velocity,  $w_{La} \approx \dot{a}$ , which ultimately creates the compression wave that moves toward the bubble's center, is lower.

As noted previously, the incident pressure evolution in the bubble cluster (Section 3) due to the external acoustic pressure field shows that the rarefaction in the cluster is smaller than  $-15$  bar, but the compression

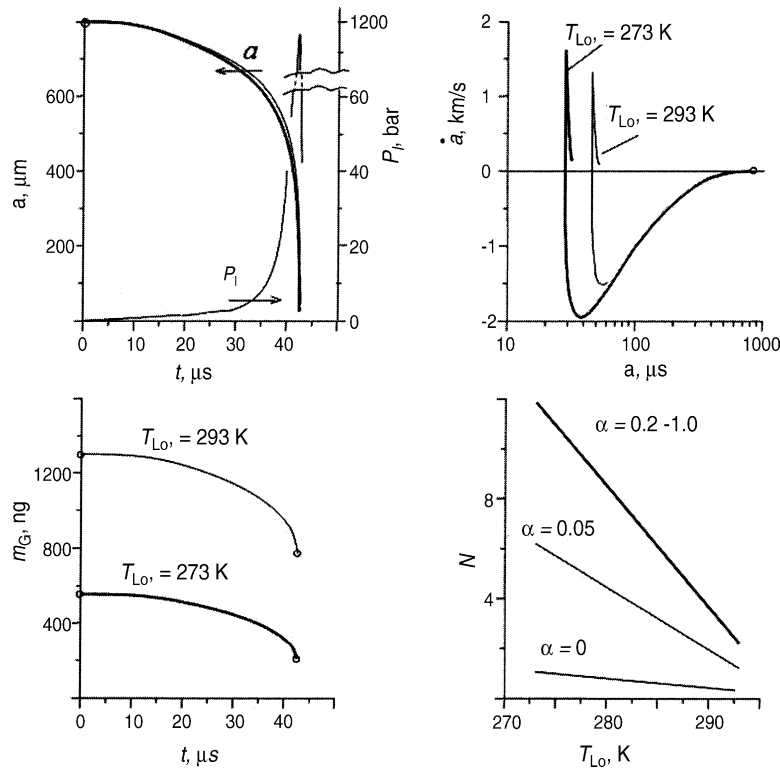


Fig. 6. Influence of the pool temperature ( $T_{L0} = 273\text{--}293$  K) and accommodation coefficient ( $\alpha = 0, 0.05\text{--}1.0$ ) on the evolution of bubble mass ( $m_G$ ), interfacial velocity ( $\dot{a}(a)$ ) and neutron production ( $N$ ). The cluster dynamics for the enhanced incident pressure,  $p_i$ , was used in these calculations (see Fig. 1). Numerical labels correspond to various values of  $T_{L0}$  and  $\alpha$ .



of the incident pressure is much higher and shorter in duration (see Fig. 1). During rarefaction the maximum bubble radius within the bubble cluster reaches only 100–300  $\mu\text{m}$ , which is too small to generate thermonuclear conditions in the imploded bubbles. However, during the growth phase Section 3 shows that about 10–20 bubbles may coalesce forming relatively large bubbles of radius 600–800  $\mu\text{m}$ . This size bubble provides sufficient focusing of the compression wave, and produces the thermonuclear conditions in the central core of the bubbles shown in Fig. 5. For 1000 bubbles in the bubble cluster, after coalescence there would be 50–100 larger bubbles. Those in the central region of the cluster will be impacted by the incident compression pressure, which is much higher than on the periphery of the bubble cluster (see Fig. 1), and gives rise to conditions which produce the D/D neutrons.

Thus, the average amount of emitted neutrons from the strongly imploding D-acetone vapor bubbles in a cold liquid pool ( $T_0 = 273\text{ K}$ ) is about 10 neutrons per acoustic cycle for the experimental conditions. According to the experiment data of Taleyarkhan et al. (2002, 2004) the Pulsed Neutron Generator (PNG) operated with frequency 200 Hz and it caused up to 50 energetic bubble cluster implosions per second, which generated D/D neutrons. Each energetic implosion was followed by about 50 acoustic cycles induced implosions (i.e., bounces), which also caused D/D neutron emissions (Nigmatulin et al., 2005). If we assume that the bubble cluster contains  $\sim 15$  strongly collapsing bubbles which each produce about 10 neutrons per implosion, we get the following number of emitted D/D neutrons per second:

$$Q_n \approx 50 \times 50 \times 15 \times 10 \approx 4 \times 10^5 \text{ n/s}, \quad (4.7)$$

which corresponds to the experimental value. In any event, it is clear that the predicted conditions within imploding bubbles are suitable for D/D thermonuclear fusion.

## 5. Conclusions

Our theoretical and numerical analyses have shown that the acoustically-forced implosion of vapor bubbles of radius  $a_{\text{max}} \sim 600\text{--}800\ \mu\text{m}$  in a bubble cluster due to a 15 bar incident acoustic pressure around the bubble

cluster, and pressure amplification within the cluster, is accompanied by the formation of a strong compression shock wave cumulating (focusing) toward the center of the bubbles. This shock wave reflects from the center of the bubble producing extremely high local velocities ( $w^* \approx 1000\text{ km/s}$ ), and a hot ( $T^* \approx 2 \times 10^8\text{ K}$ ), dense ( $\rho^* \approx 10\text{ g/cm}^3$ ), high pressure ( $p^* \approx 10^{11}\text{ bar}$ ) plasma core of radius  $0 < r < \approx 60\text{ nm}$ , having  $\sim 10^{12}$  nuclei. This extreme state lasts for only a very short time ( $t^* \approx 10^{-13}\text{--}10^{-12}\text{ s}$ ). If this core is comprised of a deuterated hydrocarbon vapor during this state, thermonuclear D/D fusion can take place, producing about 10 fast (i.e., 2.45 MeV) neutrons and an equivalent amount of tritium.

Some important features of the bubble nuclear fusion process are:

- (1) *The cold liquid effect*—where relatively small variations of the liquid pool temperature strongly influences the acceleration of the liquid and the intensity of the thermonuclear fusion reaction.
- (2) *The bubble cluster effect*—where multi-bubble cluster dynamics produces a significant amplification of the liquid pressure within the bubble cluster compared with the incident pressure of the impressed acoustic field.
- (3) *The coalescence effect*—which promotes the formation of larger bubbles within the bubble cluster having radius  $a_{\text{max}} = 600\text{--}800\ \mu\text{m}$ . This allows a high cumulation of the shock wave near the center of the bubble producing conditions in a central core region of the imploded bubbles which are suitable for D/D fusion.
- (4) *Non-dissociation of the liquid*—where, in spite of the high pressures experienced ( $10^5\text{--}10^6\text{ bar}$ ), the liquid has insufficient time for dissociation (10 ns). This is why the liquid is much less compressible than implied by an equilibrium adiabat, which corresponds to more than a microsecond of compression. Thus, extrapolation of first part of D–U shock adiabat should be used for the estimation of compressibility of the liquid.
- (5) *“Cold” electrons*—where during the extremely short time of the ultra-high compression process ( $10^{-13}\text{--}10^{-12}\text{ s}$ ), the electrons have little time to be heated by the ions. Thus, the heat capacity of the gas/vapor is  $\sim 2\text{ kJ/kg}$  instead of the equilibrium heat capacity of completely ionized plasma,

~8 kJ/kg. This causes the temperature of the ions to be four times higher than for an equilibrium plasma, which, in turn, results in conditions suitable for thermonuclear D/D fusion. Moreover the relatively “cold” electrons do not produce significant energy losses by radiation emissions.

- (6) *Multiscale Phenomena*—the energetic collapse of the bubbles is a multi-scale phenomenon with the final sharpening, where during the different stages, different physical phenomena, spatial and time scales, dominate the process. These physical processes are: heat transfer, evaporation, condensation and transition from a two-phase mixture to a supercritical fluid. The transition from an incompressible liquid and a homobaric pressure distribution in the vapor (this stage takes most of the time of the process (i.e., 41.5  $\mu$ s from 42  $\mu$ s), to high compression of the liquid and to shock wave phenomena in the gas (0.5  $\mu$ s in duration), dissociation, ionization and finally to thermonuclear fusion conditions. The spatial scales are the following: the acoustic field’s scale is  $\sim 10^{-2}$  m, the bubble cluster’s scale is  $\sim 10^{-3}$  m, the bubble’s size scale is  $\sim 10^{-5}$ – $10^{-4}$  m, the dissociated and ionized core scale is  $\sim 10^{-7}$ – $10^{-6}$  m, and the thermonuclear core scale is  $10^{-8}$ – $10^{-7}$  m. The time scales are the following: the evaporation and condensation time scale is  $\sim 10^{-5}$  s, the compression wave time scale is  $\sim 10^{-6}$  s, the dissociation and ionization time scale is  $\sim 10^{-9}$  s, and the thermonuclear reaction time scale is  $10^{-12}$ – $10^{-13}$  s. The numerical code must vary the equations to accommodate the different physical phenomena and use different size grids and, based on the Courant number, different time steps ( $\Delta t = 10^{-7}$ – $10^{-14}$  s). To clarify the process in the tiny central thermonuclear core, this zone should use cell sizes of  $\Delta r = 10^{-10}$  m for a bubble of radius  $10^{-5}$  m. The same problem exists for the thin boundary layers near the interface. Obviously, this is a computational challenge and thus these HYDRO code evaluations must be carefully done.

The thermonuclear fusion process that occurs in imploding cavitation bubbles takes place within a spatial scale of about a few tens of nanometers and a time scale of a few tenths of a picosecond. Thus, we might refer to it as, “Ten nanometer, tenth of picosecond Bubble Nuclear Fusion.”

- (7) *Three-dimensional phenomena*—three-dimensional analysis of the shape of the bubble supports the assumption of a spherically symmetrical flow (i.e., shock wave) for creating the concentration of the energy in the interior of imploding bubbles.

All these effects are crucial for the prediction of the thermonuclear reaction’s intensity.

In addition, to achieve nano-scale thermonuclear fusion it is important for the liquid to have:

- A high atomic fraction of deuterium atoms in the molecule (in D-acetone it is 6/10 = 60%).
- A high molecular weight (i.e, low sound speed in the vapor) and high condensation (accommodation) coefficient (for D-acetone,  $M = 64$  and  $\alpha \approx 1$ ).
- A low saturation pressure of vapor (which can be achieved due to a low pool temperature).
- Small non-linear compressibility of the liquid.
- High cavitation strength of the liquid.

It is important to note that heavy water ( $D_2O$ ) is not very appropriate for use in cavitation bubble nuclear fusion experiments because of its low molecular weight ( $M = 18$ ), low accommodation coefficient ( $\alpha \approx 0.05$ – $0.07$ ), relatively high non-linear compressibility and relatively low cavitation strength.

It is also not appropriate to use laser-generated bubbles in bubble nuclear fusion experiments because this process forms relatively few large bubbles (i.e., there are not many bubbles in a cluster), these large bubbles may not be spherical and they have comparatively large vapor mass, which does not permit the surrounding liquid to reach a high kinetic energy because of cushioning by the uncondensed vapor. High condensation rates of the vapor is required to minimize the cushioning of the implosion, and this, in turn, allows the kinetic energy of the liquid to be effectively transformed into internal energy of fluid in a small central plasma core region. These appear to be the main reasons that Geisler et al. (2004) were not able to obtain D/D neutron emissions during laser-induced cavitation experiments in heavy water.

#### Acknowledgement

Dick Lahey is one of the most effective and authoritative researchers in the field of multiphase



thermal-hydraulics. The author has been happy to collaborate with Professor Lahey during the last 10 years on Bubble Nuclear Fusion technology. Dr. Lahey initiated the theoretical and experimental investigation of Bubble Nuclear Fusion, a fascinating problem which has become my passion. His talent and systematic approach were crucial for the success of the activities of our Russian–American team. This team includes: Drs. Lahey, Taleyarkhan, West, Cho, Block, Akhatov, Vakhitova, Bolotnova and Topolnikov. The author appreciates the cooperation of all the members of this team. Without their outstanding and sustained efforts, the accomplishments discussed in this paper would not have been possible.

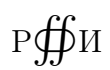
## References

- Bosh, H.S., Hale, G.M., 1992. Improved formulas for fusion cross-sections and thermal reactivities. *Nucl. Fusion* 32, 611.
- Duderstadt, J.J., Moses, G.A., 1981. *Interfacial Confinement Fusion*. John Wiley & Sons, NY.
- Geisler, R., Schmidt-Ott, W.D., Kurz, T., Lauteborn, W., 2004. Search for neutron emission in laser-induced cavitation. *Europhys. Lett.* 66 (3), 435.
- Gross, R.A., 1984. *Fusion Energy*. John Wiley and Sons.
- Guderley, G., 1942. Starke kugelige und zylindrische verdichtungsstöße in der nahe des kugelmittelpunktes der zylinderachse. *Luftfahrtforschung*, vol. 19.
- Kedrinskiy, V.K., 2000. *Hydrodynamics of Explosion. Experiment and Models*. Novosibirsk, SO RAN Pub.
- Lahey Jr., R.T., Taleyarkhan, R.P., Nigmatulin, R.I., Akhatov, I.S. Sonoluminescence and the search for sonofusion. In: *Advances in Heat Transfer*, vol. 39. Academic Press, in press.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1988. *Hydrodynamics*. Moscow, Nauka.
- Margulis, M.A., 2000. Sonoluminescence. *Uspekhi fizicheskikh nauk* 170 (3), 263 (in Russian).
- Matsumoto, Y., 2000. Bubble and bubble cloud dynamics. In: *Lauterborn, W., et al. (Eds.), Nonlinear Acoustics at the Turn of the Millennium*. New York.
- Moss, W.C., Clarke, D.B., White, J.W., Young, D.A., 1994. Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond sonoluminescence. *Phys. Fluids* 6, 2979.
- Moss, W.C., Clarke, D.B., White, J.W., Young, D.A., 1996. Sonoluminescence and the prospects for table-top micro-thermonuclear fusion. *Phys. Lett. A* 211, 69.
- Nigmatulin, R.I., 1991. *Dynamics of Multiphase Media*, vols. 1 and 2. Hemisphere, New York.
- Nigmatulin, R.I., Akhatov, I.Sh., Vakhitova, N.K., Topolnikov, A.S., 1999a. Bubble collapse and shock wave formation in sonoluminescence. In: *Nonlinear Acoustics at the Turn of the Millennium, Proceedings of the 15th International Symposium on Nonlinear Acoustics*, Göttingen.
- Nigmatulin, R.I., Akhatov, I.Sh., Vakhitova, N.K., Lahey Jr., R.T., 1999b. Hydrodynamics, acoustics and transport in sonoluminescence phenomena. In: *CrumKluwer, L., et al. (Eds.), NATO ASI Series Sonochemistry and Sonoluminescence*. Dodrecht/Boston, London.
- Nigmatulin, R.I., Shagapov, V.S.H., Gimaltdinov, I.K., Galimzyanov, M.N., 2001. Two-dimensional pressure waves in liquid with bubbly zone. *Physics-Doklady (J. Russ. Acad. Sci)* 378 (6), 763.
- Nigmatulin, R.I., Taleyarkhan, R.P., Lahey Jr., R.T., 2002. The evidence of thermonuclear fusion D + D during acoustic cavitation. In: *Vestnik ANRB, No. 4*. Ufa, Bashkortostan, Russia.
- Nigmatulin, R.I., Taleyarkhan, R.P., Lahey Jr., R.T., 2004. The evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation revisited. *J. Power Energy* 218-A, 345.
- Nigmatulin, R.I., Akhatov, I.Sh., Topolnikov, A.S., Bolotnova, R.Kh., Vakhitova, N.K., Lahey Jr., R.T., Taleyarkhan, R.T., 2005. The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion. *Phys. Fluids*, in press.
- Nigmatulin, R.I., Aganin, A.A., Ilgamov, M.A., Toporkov, D.Yu., submitted for publication. Evolution of disturbances of vapor bubble spherical shape during violent implosion in acetone. *Physics-Doklady (J. Russ. Acad. Sci.)*.
- Rakhmatulin, Kh.A., 1983. *Gas and wave dynamics*. Moscow University Press.
- Shimada, M., Matsumoto, Y., Kobayashi, T., 2000. Influence of the nuclei size distribution on the collapsing behavior of the cloud cavitation. *JSME Int. J. Ser. B* 43 (3), 380.
- Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Cho, J.S., Lahey Jr., R.T., Nigmatulin, R.I., Block, R.C., 2002. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation. *Science* 295, 1868.
- Taleyarkhan, R.P., West, C.D., Cho, J.S., Lahey Jr., R.T., Nigmatulin, R.I., Block, R.C., 2004. Additional evidence of nuclear emissions during acoustic cavitation. *Phys. Rev. E* 69, 036109.
- Walsh, J.M., Rice, M.H., 1957. Dynamic compression of liquids from measurements on strong shock waves. *J. Chem. Phys.* 26, 815.
- Wang, Y.-C., Brennen, C.E., 1994. Shock wave development in the collapse of a cloud of bubbles, cavitation and multiphase flow. *ASME* 116, 15.
- Zeldovich, Y.B., Raizer, Y.P., 1966. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Academic Press, New York.

# Оглавление

Предисловие .....	3
<b>Нигматулин Р.И.</b> 13 статей академика Р. И. Нигматулина (авторское предисловие).....	6
<b>Нигматулин Р.И.</b> Плоский сильный взрыв на границе двух идеальных калорически совершенных газов.....	8
<b>Нигматулин Р.И.</b> Сходящиеся цилиндрические и сферические детонационные волны .....	13
<b>Нигматулин Р.И.</b> Модель движения и ударные волны в двухфазных твердых телах с фазовыми переходами .....	19
<b>Нигматулин Р.И., Холин Н.Н.</b> К модели упруго-пластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования .....	27
<b>Нигматулин Р.И., Шагиев Р.Г., Шагапов В.Ш., Валявин Г.Г., Фрязинов В.В., Нигматулин Б.И.</b> Математическое моделирование в гидравлическом приближении газожидкостных потоков с химическими реакциями и анализ процесса нагрева нефтяного сырья в трубчатых печах.....	43
<b>Нигматулин Р.И., Пыж В.А.</b> Усиление ударных волн в бентонитовых суспензиях .....	47
<b>Nigmatulin R.I.</b> Some Fundamentals and Applications, Paradoxes, and Myths in Mechanics of Multiphase Flow .....	51
<b>Nigmatulin R.I.</b> Drift flux model as approximation of two fluid model for two phase dispersed and slug flow in tube.....	67

<b>Нигматулин Р.И., Шагапов, В.Ш., Сыртланов, В.Р.</b> Автомодельная задача для разложения газогидрата в пористой среде под действием нагрева и депрессии .....	92
<b>Нигматулин Р.И., Казанцева Т.Т., Камалетдинов М.А., Казанцев Ю.В.</b> Физическая природа термической аномалии горы Янгантау в Южном Урале .....	100
<b>Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Vakhitova N.K., Lahey R.T.</b> On the forced oscillations of a small gas bubble in a spherical liquid filled flask .....	103
<b>Нигматулин Р.И.</b> Об оптимальной доле государственных расходов в ВВП и темпах экономического роста .....	130
<b>Nigmatulin R.I.</b> Nano-scale thermonuclear fusion in imploding vapor bubbles .....	137



Издано при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(грант №20-01-20031\20)