

# Сборник трудов

X Российской конференции —  
школы молодых ученых с международным участием  
**«Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения»**  
посвященной 100-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Р.Р. Мавлютова  
и 75-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова

Уфа, 12–15 мая 2026 г.

# Организаторы конференции

**ОЭММПУ РАН**

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук (ОЭММПУ РАН),



**УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

Уфимский федеральный исследовательский центр РАН (УФИЦ РАН),



Академия наук Республики Башкортостан (АН РБ),



**Институт механики  
им. Р.Р. Мавлютова**  
Уфимского научного центра РАН

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (ИМех УФИЦ РАН)

## Содержание

<b>Аббас Е., Сорокин Ф.Д.</b> Моделирование деградации морских покрытий .....	6
<b>Абдрахимова К.Р., Гималтдинова А.А., Якупов Р.В.</b> Некоторые трансцендентные уравнения в спектральных задачах для дифференциальных уравнений .....	8
<b>Абдульманова Р.Р., Зарипов Р.М., Масалимов Р.Б.</b> Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния газопровода с железобетонными утяжелителями в обводненной зоне .....	9
<b>Аганин А.А.</b> Динамика одиночных пузырьков и пузырьков в кластерах .....	12
<b>Аганин А.А., Мустафин И.Н.</b> Коллапс симметрично расположенных парогазовых пузырьков в жидкости .....	14
<b>Агрелов И.Н., Хохлов Н.И.</b> Применение сеточно-характеристического метода для численного исследования анизотропии трещиноватых сред .....	16
<b>Антаков Ф.В., Заметаев В.Б.</b> Взаимодействие малой движущейся сферы с пограничным слоем Блазиуса .....	19
<b>Антонов Д.В.</b> Взрывная фрагментация капель и слоев жидкостей в условиях интенсивного нагрева .....	21
<b>Антонов Д.В.</b> Доставка аэрозолей в легкие: эксперимент, моделирование и клинические сценарии .....	22
<b>Ахметов А.Т., Гизатуллин Р.Ф., Богданов Д.Р., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф.</b> Амплитудно-частотные характеристики ударно-волновых импульсов, распространяющихся в водогазонасыщенном песке .....	23
<b>Бапанина Я.И., Насыров А.А.</b> Техногенные аварии на шельфе: анализ последствий и методы локализации утечек с применением защитных куполов .....	26
<b>Болотнова Р.Х., Шигапов А.М.</b> Моделирование ослабления ударной волны при детонации цилиндрического заряда в слое водной пены .....	28
<b>Гаврюшин С.С., Сорокин Ф.Д., Мешалкин Н.Г.</b> Энергетический критерий корректности уравнений плоской задачи механики стержней .....	30
<b>Гафиятов Р.Н.</b> Акустика жидкости с покрытыми анизотропной оболочкой каплями при наличии фазовых переходов .....	33
<b>Гималтдинов И.К., Родионов А.С., Валиахметова О.Ю., Шираева А.А., Закирова Э.Р.</b> Численное решение начально-граничной задачи о воздействии ударного импульса на слой насыпной среды при повторном отражении .....	34
<b>Гришко И.Д., Байкин А.Н., Абдуллин Р.Ф., Копейкин Р.Р.</b> Трехмерное моделирование прорыва глинистого флюидоупора трещиной авто-ГРП в слоистой пороупругой среде .....	36
<b>Давлетов Д.Б.</b> О сходимости собственных элементов двумерной сингулярно возмущенной краевой задачи типа Стеклова для оператора Ламе .....	39
<b>Демин В.А., Демина Т.В., Игошев С.А.</b> Нелинейные уравнения диффузии и их применение в задачах материаловедения .....	41
<b>Еникеев И.Х.</b> Математическая модель движения полидисперсных потоков в многоступенчатых сопловых сепараторах .....	43

<b>Загитов Р.Р., Ситдииков О.Ш., Автократова Е.В., Маркушев М.В.</b> Влияние всесторонней изотермическойковки на структуру и коррозионное поведение сплава 1570С.....	45
<b>Закиров А.Х.</b> Обтекание препятствия потоком жидкости во внезапно расширяющейся трубе.....	47
<b>Имомназаров Б.Х.</b> Определение оптимальной схемы объединения компонент углеводородной смеси методами метаэвристического поиска.....	48
<b>Ишмухаметов К.И., Ганцев Ш.Х., Урманчиев С.Ф.</b> Математическое моделирование динамики терминального отдела грудного лимфатического протока.....	50
<b>Кильдибаева С.Р., Харисов Э.И.</b> Моделирование гидратообразования и диссоциации в естественных и техногенных морских течениях.....	52
<b>Коваль К.А., Сухоруков А.Л.</b> Численный метод определения вибропрочностных характеристик выдвижных устройств подводных аппаратов.....	54
<b>Корнев Ю.В., Валиев Х.Х., Молчанов С.П., Гилязова Р.Ф., Власов А.Н., Карнет Ю.Н.</b> Сканирующая зондовая микроскопия эластомерных композитов с техническим углеродом.....	57
<b>Litvinova K.V.</b> Modeling oil and gas field development based on self-modeling traveling-wave solutions for two-component filtration.....	60
<b>Лопато А.И., Уткин П.С.</b> Влияние формы частицы на динамику ее подъема в потоке за ударной волной.....	61
<b>Миронов А.Н., Миронова Л.Б.</b> О функции Римана — Адамара для уравнения Бианки общего вида.....	64
<b>Михайленко К.И., Галикеева Р.Р.</b> Сглаживающий эффект аномальной термовязкости при обтекании подогреваемой каверны.....	66
<b>Михайлов П.Н., Спиридонова Н.А.</b> Об одном подходе к исследованию неравновесных термодинамических процессов в пористых средах.....	69
<b>Мухутдинова А.А.</b> Влияние условий теплообмена на течение растворов ПАВ.....	71
<b>Насибуллаева Э.Ш.</b> Параметрический анализ рассеяния акустической волны на множестве сферических частиц в трехмерном пространстве.....	72
<b>Низамова А.Д.</b> Об устойчивости течения термовязкой жидкости в плоском и кольцевом каналах.....	74
<b>Овинов Е.В., Ахметов А.Т.</b> Фильтрация дисперсных сред с пористой структурой органического и неорганического происхождения.....	76
<b>Очеретяный С.А., Прокофьев В.В., Топейцев Г.В.</b> О природе высокочастотных режимов кавитационных автоколебаний в гидросистемах, содержащих вентилируемую газовую каверну.....	78
<b>Очиров А.А.</b> Критерии полноты и методы построения решений системы фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей.....	81
<b>Очиров А.А.</b> Периодические течения в сжимаемой неизотермической жидкости: акустические и гравитационные волны и лигаменты.....	84

<b>Привалов Л.Ю.</b> Задача выделения крупных зон на основе сегментации полей физических свойств.....	87
<b>Пузина Ю.Ю., Корняков И.А., Тарасенко В.Д.</b> Колебания сверхтекучего гелия в каналах различной геометрии: сравнение экспериментальных данных .....	90
<b>Расулов А.Б.</b> Краевые задачи для одного класса эллиптических систем первого порядка с сильными особенностями в младших коэффициентах .....	93
<b>Сабитов К.Б.</b> О корректности первой граничной задачи для уравнений смешанного типа с келдышевским вырождением .....	95
<b>Самохин Б.А., Юлмухаметова Ю.В.</b> Точное решение интегрируемой гидродинамической модели с линейным полем скоростей .....	96
<b>Сидоров С.Н.</b> О некоторых задачах для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением .....	98
<b>Сказочкин А.В., Усеинов А.С.</b> О сравнении методов измерения твердости дисперсных систем .....	100
<b>Столповский М.В., Насыров А.А.</b> Численное моделирование отбора газа и нефти из купола-сепаратора с помощью системы соосных цилиндрических каналов .....	103
<b>Терешкин В.В.</b> Структура и механические свойства высокопрочного сплава после КВД .....	104
<b>Терешкин В.С.</b> Управление объемной конденсацией в сверхзвуковом сопле при наличии кластеров .....	105
<b>Тукмаков Д.А.</b> Численное моделирование динамики одиночной ударной волны малой интенсивности в канале с волокнистым наполнителем .....	108
<b>Тухватуллин Р.И., Рахимов А.А., Саметов С.П.</b> Гидродинамический эксперимент и численное моделирование в микрофлюидной системе «почка-на-чипе» .....	111
<b>Утяшев И.М., Фатхелисламов А.Ф.</b> Граничная обратная задача для стержня с продольным надрезом .....	112
<b>Федоров Ю.В.</b> Динамика покрытой анизотропной оболочкой капли перфторуглерода .....	114
<b>Филиппов А.И., Зеленова М.А.</b> Сильно диссипативные течения в пористых средах .....	116
<b>Хакимов А.Г.</b> Равновесие участка трубопровода при подъеме .....	119
<b>Чашечкин Ю.Д.</b> Основы описания энергетики, динамики и структуры макро- и микротечений жидкостей и газов .....	120
<b>Чепенко В.С., Рахимов А.А., Валиев А.А., Ахметов А.Т.</b> Особенности течения крови в микроканалах с тандемными стенозами: экспериментальное и численное исследование .....	122
<b>Шакирьянов М.М., Ермоленко А.Н., Ахмедьянов А.В., Юлмухаметов А.А.</b> Теоретическое и экспериментальное исследование статического напряженно-деформированного состояния трубопровода и его опор .....	123
<b>Юлмухаметов А.А., Утяшев И.М., Фатхелисламов А.Ф.</b> Модель балки на упругом основании с переменным коэффициентом постели .....	124

## Моделирование деградации морских покрытий

Аббас Ескандер, Сорокин Ф.Д.

МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва

Рассматривается физико-математическое описание деградации подводных защитных покрытий ледоколов в морской среде под действием механических, гидродинамических, диффузионных, коррозионных и биологических факторов.

В реальных условиях эксплуатации состояние покрытия определяется не отдельными воздействиями, а их совместным и взаимосвязанным влиянием, поэтому анализ должен основываться на комплексном учёте основных процессов деградации.

В опубликованных работах указанные механизмы обычно рассматриваются по отдельности, что удобно при изучении частных эффектов, однако не даёт полного представления о поведении системы «покрытие–подложка» в эксплуатационной среде.

В связи с этим в работе рассматривается единая постановка задачи, в рамках которой основные воздействующие факторы учитываются совместно при анализе поведения тонкого покрытия и системы «покрытие–подложка» [1–6].

Механический блок строится на уравнениях Фёппля–фон Кармана для тонкого покрытия с учётом начальных напряжений [1].

В качестве основных переменных вводятся прогиб покрытия  $w(x, y, t)$  и функция напряжений Эйри  $\Phi(x, y, t)$ .

Расчётная схема записывается в виде:

$$\Delta^2 \Phi + E h_{\text{покр}} [w, w] = \Delta^2 \Phi_0$$

$$D_{\text{изг}} \Delta^2 w - [\Phi, w] = q(x, y, t), D_{\text{изг}} = \frac{E h_{\text{покр}}^3}{12(1-\nu^2)}$$

Здесь  $E$  — модуль упругости покрытия,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $h_{\text{покр}}$  — толщина слоя,  $q$  — распределённая нагрузка,  $D_{\text{изг}}$  — жёсткость изгиба покрытия.

Величина  $q$  включает гидродинамическое давление межфазной плёнки, а эффективные механические характеристики покрытия в общем случае зависят от влагосодержания [1, 4].

Состояние границы раздела «покрытие–подложка» описывается в терминах смешанного межфазного разрушения [2].

Движущая сила роста деламации определяется как:

$$G_{\text{осв}} = G_I + G_{II}$$

а эффективный критический уровень принимается в форме:

$$G_{\text{кр}}^{\text{эф}} = G_{\text{кр}}^I + (G_{\text{кр}}^{II} - G_{\text{кр}}^I) \psi^\eta \quad \psi = \frac{G_{II}}{G_I + G_{II}}$$

Критерий развития отслоения имеет вид

$$G_{\text{осв}} \geq G_{\text{кр}}^{\text{эф}}.$$

При длительной морской экспозиции эффективная адгезия снижается вследствие увлажнения и коррозионного повреждения границы раздела, поэтому  $G_{\text{кр}}^{\text{эф}}$  рассматривается как эволюционный параметр, связанный с текущим состоянием покрытия и подложки [2,4,5].

Для описания межфазной водяной прослойки используется уравнение Рейнольдса в приближении тонкого слоя [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_{\text{заз}}^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h_{\text{заз}}^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U h_{\text{заз}}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V h_{\text{заз}}}{2} \right) + \frac{\partial h_{\text{заз}}}{\partial t}$$

где  $p(x, y, t)$  — давление в плёнке,  $\mu$  — динамическая вязкость,  $U$  и  $V$  — относительные скорости.

Давление  $p$  входит в механическое уравнение как внешняя распределённая нагрузка. Одновременно изменение прогиба покрытия влияет на локальную толщину зазора  $h_{\text{заз}}(x, y, t)$ , что формирует обратную связь между механическим и гидродинамическим блоками [1, 3].

Влагонакопление в покрытии в базовой постановке описывается законом диффузии Фика [4]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{\text{диф}} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

где  $c(x, t)$  — влагосодержание,  $D_{\text{диф}}$  — коэффициент диффузии.

Рост  $s$  приводит к изменению механических характеристик полимерного слоя, снижению межфазной прочности и облегчению доступа электролита к металлу [4, 5].

Подплёночная коррозия учитывается через скорость потери толщины металла, определяемую по коррозионной плотности тока [5]:

$$\delta_m(t) = \frac{M}{nF\rho} i_{\text{корр}}(t)$$

где  $M$  – молярная масса металла,  $n$  – число электронов в электрохимической реакции,  $F$  – постоянная Фарадея,  $\rho$  – плотность материала.

Параметр  $\delta_m(t)$  изменяет геометрию зазора на границе раздела и тем самым дополнительно влияет на гидродинамическое давление и условия развития деламинации [2,3,5].

Биообрастание рассматривается в рамках кинетического описания, связанного с гидродинамическим воздействием и состоянием поверхности.

В качестве основных переменных используются биомасса  $B(t)$  и доля заселённой поверхности  $X(t)$ .

Рост биомассы принимается логистическим:

$$\frac{dB}{dt} = rB \left(1 - \frac{B}{K}\right)$$

а изменение доли заселения описывается выражением:

$$\frac{dX}{dt} = a(1-X)S - \beta(\tau_w)X$$

где  $a$  характеризует прикрепление, а  $\beta(\tau_w)$  – интенсивность отрыва при действии стеночного сдвигового напряжения  $\tau_w$  [3, 6].

Такое представление позволяет учитывать как рост обрастания в спокойной морской среде, так и его частичное удаление под действием потока.

Таким образом, рассматриваемая постановка описывает деградацию защитного покрытия как сопряжённый процесс, в котором механическое деформирование, межфазное разрушение, течение тонкой водяной прослойки, влагоперенос, коррозия и биообрастание

образуют единую систему взаимосвязанных уравнений.

Практическое значение модели состоит в возможности пошагового расчёта состояния покрытия с обновлением свойств материала, параметров границы раздела и геометрии зазора на каждом временном шаге.

Такая схема может использоваться как основа для последующей параметрической идентификации и верификации по данным длительной морской экспозиции защитных покрытий [1–6].



Рис. 1. Схема модели деградации покрытия ледокола

**Список литературы**

[1] Ciarletta P., Pozzi G., Riccobelli D. The Föppl–von Kármán equations of elastic plates with initial stress // Royal Society Open Science. 2022. Т. 9. № 8. Ст. 220185.  
 [2] Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials // Advances in Applied Mechanics. 1992. Т. 29. С. 63–191.  
 [3] San Andrés L. Derivation of the classical Reynolds equation for thin film flows. College Station: Texas A&M University, 2010. 34 с.  
 [4] Yang C., Xing X., Li Z., Zhang S. A comprehensive review on water diffusion in polymers focusing on the polymer–metal interface combination // Polymers. 2020. Т. 12. Ст. 138.  
 [5] Kruger J. Electrochemistry of corrosion // Electrochemistry Encyclopedia [Электронный ресурс]. 2001.  
 [6] Uzun D., Demirel Y.K., Coraddu A., Turan O. Time-dependent biofouling growth model for predicting the effects of biofouling on ship resistance and powering // Ocean Engineering. 2019. Т. 191. Ст. 106432.

## Некоторые трансцендентные уравнения в спектральных задачах для дифференциальных уравнений

Абрахимова К.Р., Гималтдинова А.А., Якупов Р.В.

ФГБОУ «Уфимский государственный нефтяной технический университет», Уфа

Трансцендентные уравнения часто появляются при решении спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных. Например, в книге [1] в задаче о колебаниях стержней при нахождении собственных значений возникли трансцендентные уравнения  $\cos m \cdot \operatorname{cosh} m = 1$  и  $\cos m \cdot \operatorname{cosh} m = -1$ . Найденны по 6 положительных корней этих уравнений и получены приближенные формулы для них:  $m_k \approx \pi k + \pi/2$  и  $m_k \approx \pi k - \pi/2$  соответственно. Отсутствие других комплексных корней, кроме чисто мнимых, объясняется с физической точки зрения.

Некоторые методы и приемы нахождения действительных и комплексных корней трансцендентных уравнений (например,  $\tan m - \tanh m = \frac{C}{m}$ ,  $\sin m = m$ ,  $\cos x = x \sin x$ ) предложены в [2, 3] и приведены приближенные формулы для корней таких уравнений. В [2] показано применение формулы Бюрмана – Лагранжа для определения корней.

В статье [4] изучено уравнение  $\tan \mu = t \operatorname{anh} \mu$ , возникшее при решении краевой задачи для уравнения  $\operatorname{sign} x \cdot X'' + d \cdot X = 0$ ,  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ . Найденно счетное множество его действительных и чисто мнимых корней ( $\pm \mu_k$ ;  $\pm i \mu_k$ , где  $\mu_k = -\frac{\pi}{4} + \pi k + \varepsilon_k$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ) и аналитически обосновано отсутствие других комплексных корней. Так же исследованы уравнения  $\cos \mu \operatorname{cosh} \mu \pm \sin \mu \sinh \mu = 1$ ,  $\cos \mu \operatorname{cosh} \mu = 1$ , найдены множества их решений (асимптотические формулы). Однако не был оценен порядок

малости слагаемого  $\varepsilon_k$ , а этот вопрос очень важен при изучении скорости сходимости рядов Фурье, появляющихся при решении краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Настоящая работа является продолжением [4], и ее целью является рассмотрение более общих трансцендентных уравнений:  $\cos(\mu l) \operatorname{cosh} \mu = 1$ ,  $l > 0$ ;  $\tan(\mu l) = t \operatorname{anh} \mu$   $\tan \mu = -\mu$ ;  $\tan \mu = \frac{1}{\mu}$  и других, а также установление не только асимптотических формул, но и двусторонних оценок для корней этих уравнений. Кроме того, важно с чисто математической точки зрения обосновать наличие или отсутствие комплексных корней.

Было доказано следующее утверждение.

**Теорема.** Уравнение  $\tan(\mu) = -\mu$  имеет счетное множество корней, состоящее из  $\mu_0 = 0$  и чисел

$$\pm \mu_k, \quad \mu_k = -\frac{\pi}{2} + \pi k + \varepsilon_k, \quad \text{где}$$

$$\frac{1}{4k} < \varepsilon_k < \frac{2}{\pi(2k-1)}.$$

А для уравнения  $\cos(\mu l) \operatorname{cosh} \mu = 1$  показано, что множества его решений отличаются в случаях  $0 < l < 1$  и  $l > 1$ .

### Список литературы

- [1] J.W.S. Rayleigh, The Theory of Sound. Vol. I. – London: Macmillan and Co., 1877., с. 222.
- [2] М.В. Федорюк. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987, с. 47.
- [3] Н.Г. Де Брейн. Асимптотические методы в анализе. – М.: Мир, 1966., с. 36
- [4] А. Гималтдинова. Some transcendental equations with trigonometric and hyperbolic functions // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2018, Vol. 39, No. 2, pp. 209–212.

# Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния газопровода с железобетонными утяжелителями в обводненном участке

Абдульманова Р.Р.,\* Зарипов Р.М.,\* Масалимов Р.Б.\*\*

\* Институт механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленное структурное подразделение ФГБНУ Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (ИМех УФИЦ РАН), Уфа

\*\* Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

## 1. Введение

Газопроводы, проложенные на болотах, в заболоченной местности и карстовой зоне, пересекающие различные водные преграды (реки, водохранилища, подводные морские переходы), деформируясь с водонасыщенным грунтом, подвергаются обводнению [1-4]. Несмотря на балластировку трубопроводов железобетонными утяжелителями, закрепление их в грунте анкерными устройствами и замену гладких труб бетонированными трубами при сооружении и капитальном ремонте при их эксплуатации происходит всплытие труб. Анализ фотографий всплывших участков газопроводов с железобетонными утяжелителями указывает на опрокидывание с трубы утяжелителей. Эти участки газопровода квалифицируются «поврежденными», выводятся из эксплуатации.

Газопроводы на болотах сооружаются и эксплуатируются в сложных инженерно-геологических условиях. Причинами образования подводных затопленных частей трубопроводов на болоте является обводнение грунта вследствие изменения состояния грунта-основания и грунта-засыпки за счет их замерзания и таяния в зависимости от сезона года, совместных деформаций с прогретой трубой, которая дополнительно нагревается за счет перекачки по ней прогретого газа. В данном сообщении будет дано описание постановки и решения задачи о его напряженно-деформированном состоянии (НДС) с учетом сложных условий его эксплуатации и особенностей конструкции, а также осуществлен анализ его НДС для выявления и устранения его всплытия.

## 2. Постановка задачи и описание ее решения методом конечных элементов в перемещениях

Рассматриваемый участок газопровода на болоте состоит из подводной затопленной части, которая располагается в середине участка и крайних частей, в которых труба находится в траншее, засыпанной грунтом при сооружении газопровода. В подводной затопленной части размытая с грунта оголенная труба находится под действием собственного веса, веса

перекачиваемого газа, веса установленных на ней утяжелителей, выталкивающей силы воды, гидростатического давления. В прилегающих подземных частях реакция грунта на прогиб трубы и на ее продольное перемещение задается через обобщенные коэффициенты в зависимости от значений физико-механических характеристик грунта и геометрических характеристик трубы.

Рассмотрены две постановки задачи. В первой упрощенной постановке вышеописанный участок трубопровода моделируется одномерным стержнем, который находится под действием распределенной поперечной нагрузки и продольной растягивающей или сжимающей силы, а также в случае отсутствия действия этой силы в зависимости от конструкции газопровода. Если концы рассчитываемого участка защемлены грунтом, то здесь труба сжимается продольной осевой силой. Величина этой силы зависит от параметров эксплуатации (внутреннего давления и температурного перепада) и физико-механических, геометрических характеристик трубы.

В случае, когда на выходе подземной части на поверхность земли установлены компенсаторы, то величина растягивающей продольной силы задается в зависимости от значения внутреннего давления и отпора компенсатора на продольное перемещение трубы. В этой конструкции газопровода отсутствуют температурные напряжения.

Но в этой модели не учитывается сопротивление грунта перемещению трубы в продольном направлении. Для описания НДС трубопровода используются дифференциальные уравнения продольно-поперечного изгиба стержня, находящегося под совместным действием распределенной поперечной нагрузки и продольной растягивающей силы или продольной сжимающей силы, а также в случае отсутствия действия этой продольной силы в зависимости от условий, реализуемых на концах рассчитываемого участка [5]. Полученные в них результаты раскрывают физическую картину деформации трубопровода в зависимости от совместных деформаций трубы с грунтом в прилегающих подземных частях, воздействия выталкивающей силы воды в средней

подводной части с учетом особенностей конструкции газопровода при различных значениях параметров эксплуатации. Эта упрощенная модель не позволяет описать сопротивление грунта продольным перемещениям трубы, несимметричное нагружение примыкающих крайних подземных частей трубопровода и неодинаковую осадку грунта-основания в этих частях.

Во второй модели НДС рассматриваемого участка трубопровода на болоте моделируется одномерной стержневой системой в упругой среде, которая состоит из стержней трубчатого сечения и узлов их сопряжения. Их количество определяется анализом профиля трассы в соответствии с проектно-исполнительской документацией и параметрами эксплуатации.

На первом этапе осуществляется постановка задачи о НДС элемента стержня. В ней приводятся нелинейные кинематические и физические зависимости, нелинейные дифференциальные уравнения равновесия, которые преобразуются в нормальную систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

На втором этапе выполняется численное моделирование НДС обводненного газопровода стержневой системой. В нем для каждого узла сопряжения стержней составляется уравнение равновесия с учетом действия железобетонного утяжелителя, который может находиться в этом узле. Решения этих систем алгебраических уравнений и систем дифференциальных уравнений для стержней методом конечных элементов в перемещениях описывают полную картину НДС обводненного газопровода, который балластирован железобетонными утяжелителями.

### 3. Анализ НДС обводненного участка газопровода, балластированного железобетонными утяжелителями

Анализ НДС обводненного участка газопровода на болоте показал, что причиной его всплытия являются: воздействие температурных напряжений; неравномерное неодинаковое проседание трубы в грунт на подземных частях, находящиеся слева и справа от размытой оголенной части; уменьшение веса утяжелителей в воде за счет роста величины выталкивающей силы воды вследствие увеличения удельного веса воды, зависящего от концентрации растворенных минеральных солей и наличия в ней остатков разложения растительного происхождения. Найдены критические значения параметров эксплуатации, при достижении которых изменяется форма изгиба трубы, предшествующей ее всплытию.

Расчеты НДС обводненного участка газопровода, балластированного железобетонными утяжелителями, по инженерным формулам, в которых воздействие последних на трубу задается распределенной внешней поверхностной нагрузкой, дают удовлетворительные

результаты только для случая, когда имеет место равномерная одинаковая осадка трубы в грунт в прилегающих подземных частях. В этом случае начальный этап выпучивания трубы со стрелой прогиба, направленной вверх, соответствует первому этапу всплытия трубы, определяется параметрами эксплуатации газопровода.

В случае, когда имеет место неравномерная неодинаковая осадка трубы в грунте на прилегающих подземных частях, то результаты расчета по инженерным формулам указывают на выпучивание трубы со стрелой изгиба, направленной вверх, независимо от параметров эксплуатации. В этом случае расчет по инженерным формулам дает некорректное решение задачи.

Основными причинами, которые обуславливают всплытие балластированных магистральных газопроводов в условиях болот и обводненной местности, являются: изменение состояния грунта вследствие его обводнения; уменьшение веса утяжелителей за счет роста величины выталкивающей силы воды вследствие увеличения удельного веса воды с растворенными в ней минеральными солями и остатков разложения растительного происхождения. Они вызваны сложными инженерно-геологическими условиями эксплуатации газопроводов [6]. Их устранение осуществляется изменением условий эксплуатации и изменением конструкции газопровода. Перспективным являются широко применяемые в последние годы технологии, в которых балластированные трубы при сооружении и капитальном ремонте заменяются обетонированными трубами. Как было указано во введении данного сообщения, известны случаи всплытия обетонированных труб на подводных переходах морского газопровода через Байдарацкую губу на Ямале. Поэтому в дальнейшем необходимо выполнить исследования, посвященные на выявление причин возможного всплытия обетонированных труб, которые применяются в технологии сооружения на болоте, в зависимости от сложно-геологических условий эксплуатации газопроводов.

*Финансирование: Работа выполнена при поддержке государственного задания по теме № 123021200015-5 (FMRS-2023-0015).*

### Список литературы

- [1] Айнбиндер А.Б., Камерштейн А.Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра; 1982. 340 с.
- [2] Быков Л.И., Мустафин Ф.М., Рафиков С.К. и др. Типовые расчеты при сооружении и ремонте газонефтепроводов. СПб: Недра; 2011. 748 с.
- [3] Васильев Г.Г. Достоинства и недостатки современных подходов к балластировке подводных переходов / Г.Г. Васильев, Ю.А. Горяинов, А.И., Сакаганский // НГС. – 2012. – №1. – С. 30-37.
- [4] Димов Л.А., Богушевская Е.М. Магистральные трубопроводы в условиях болот и обводненной местности.

- М.: Издательство Московского государственного горного университета; 2010. 392 с.
- [5] Коробков Г.Е., Зарипов Р.М., Шаммазов И.А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов и резервуаров в осложненных условиях эксплуатации. СПб: Недра; 2009. 409 с.
- [6] Расчет и обеспечение прочности трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов / А.М. Шаммазов, Р.М. Зарипов, В.А. Чичелов, Г.Е. Коробков. – М.: Изд-во «Интер», 2005. – Т.1. – 706 с.

## Динамика одиночных пузырьков и пузырьков в кластерах

Аганин А.А.

Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Динамика парогазовых пузырьков в жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными проблемами и полезными применениями кавитации. В частности, воздействие кавитационных пузырьков может вызывать механическое повреждение, эрозию, износ и разрушение трубопроводных систем, транспортирующих жидкости, гидронасосов, клапанов и мембран, регулирующих потоки жидкости, гидротурбин, гребных винтов и поворотных рулей судов, гидрокрыльев. Кавитационные пузырьки могут вызывать шум, вибрацию гидротехнического оборудования и т.д. Вместе с тем, кавитационные пузырьки могут способствовать очистке твердых поверхностей от загрязнений при производстве полупроводников, дроблению камней в почках фокусированными ударно-волновыми импульсами или высокоинтенсивным ультразвуком в медицине. Кавитация может быть полезной в сонохимии, где кавитационные пузырьки играют роль микрореакторов, для интенсификации химреакций как за счет высоких температур в пузырьках и их окрестности, так и посредством очистки поверхностей твердых реагентов или катализаторов и удаления с них окислов. В ультразвуковых технологиях кавитация способствует повышению эффективности гетерогенного катализа, перемешиванию несмешиваемых жидкостей для получения высокостабильных эмульсий. Кавитацию используют при обеззараживании загрязненной воды и т.д.

В настоящей работе представлен краткий обзор ряда исследований по динамике одиночных паровых и парогазовых пузырьков и совместной динамике газовых пузырьков в сферических кластерах в воде, выполненных под руководством автора в возглавляемой им лаборатории ВДСС (Вычислительной Динамики Сплошной Среды) Института механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН.

1. При коллапсе парового пузырька в воде можно выделить два сценария сжатия. В первом (известном) сценарии пар в пузырьке сжимается безударно, а во втором - внутри пузырька

возникают сферические ударные волны, радиально сходящиеся к центру пузырька, так что пар в нем подвергается ударному сжатию. В обоих сценариях температура пара в пузырьке может достигать значений порядка 10 000 К и выше.

Возможность реализации данных сценариев продемонстрирована с применением прямого численного моделирования [1], в котором динамика пара в пузырьке и окружающей жидкости описывается уравнениями газовой динамики в форме законов сохранения массы, импульса и энергии. При этом учитывается теплопроводность обеих сред, испарение/конденсация на поверхности пузырька. Для описания состояния обеих сред применяются широкодиапазонные уравнения состояния Нигматулина-Болотновой [2] в их версии без учета эффектов диссоциации и ионизации.

Достоверность модели подтверждается сравнением результатов расчета ряда задач динамики пузырьков на режиме с их интенсивным коллапсом с известными результатами численного моделирования и экспериментальными данными других авторов.

2. При высоких температурах водяного пара (порядка 10 000 К и выше), которые получаются в рамках указанных выше двух сценариев коллапса парового пузырька в воде, существенное влияние на динамику пузырька может оказывать диссоциация пара. С учетом этого представлены результаты исследования эффекта диссоциации водяного пара при его квазистатическом изоэнтропическом сжатии и изоэнтропическом сжатии со скоростью коллапса паровой полости Рэлея [3], а также при ударном сжатии. Проиллюстрированы особенности все более возрастающего влияния диссоциации пара по мере повышения степени его сжатия после достижения его температурой температуры диссоциации.

3. Наличие в паровом пузырьке неконденсируемого газа может оказывать существенное влияние на характеристики динамики пузырька. С учетом этого представлены результаты исследования динамики изначально покоящегося

парогазового пузырька при импульсном разряжении окружающей жидкости, под которым понимается резкое понижение давления жидкости, удержание его на пониженном уровне в течение некоторого промежутка времени (определяющего длительность импульса), и последующее резкое повышения до исходного уровня.

Использовалась математическая модель динамики пузырька, являющаяся обобщением известной модели Нигматулина-Хабеева [4] на случай наличия диффузии газа не только в пузырьке, но и через его поверхность и в жидкости.

Достоверность модели подтверждается сравнением результатов расчета задачи о расширении и сжатии парогазового пузырька в трубе, частично заполненной жидкостью (труба падает вертикально вниз и резко останавливается из-за столкновения с преградой), с результатами расчетов и экспериментальными данными работы [5].

4. Представлены результаты исследования динамики воздушных пузырьков в сферическом кластере в воде при ультразвуковом возбуждении. Кластер состоит из изначально одинаковых по размеру сферических пузырьков, центры которых расположены в узлах кубической сетки (один из узлов находится в центре кластера). Условия задачи близки к тем, что соответствуют условиям реализации явления однопузырьковой сонолюминесценции (давление жидкости 1 бар, температура 20 °С, начальный радиус пузырьков 5 мкм), при котором, как известно, достигаются очень высокие степени сжатия пузырька. Частота возбуждения 20 кГц. Рассмотрено возбуждение с двумя значениями амплитуды 1.025 и 1.125 бар. Число пузырьков в кластере варьируется от 57 до 179. Исследование выполняется до тех пор, пока один из пузырьков кластера не начнет разрушаться или сливаться с другим пузырьком.

Показано, что взаимодействие между пузырьками кластера оказывает заметное влияние на их радиальные колебания и давление внутри них. В частности, взаимодействие приводит к значительному повышению интенсивности коллапса центрального пузырька кластера. Центральный пузырек коллапсирует сильнее других. В окрестности первого коллапса несферичность пузырьков имеет выраженный максимум. Перемещения пузырьков в ходе одного периода

возбуждения относительно малы. По мере уменьшения радиуса кластера и увеличения числа его пузырьков, амплитуда радиальных колебаний пузырьков кластера, величина достигаемых в них максимальных давлений, величина максимальной амплитуды их несферических деформаций и их радиальные смещения в кластере возрастают, а величина минимального расстояния между пузырьками убывает.

Исследования выполнены с применением математической модели совместной динамики пузырьков, относящейся к классу дискретных моделей (particle-моделей). Данная модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиусов пузырьков, радиус-векторов положений их центров и амплитуд их малых деформаций пузырьков в виде сферических гармоник. По расстоянию между пузырьками данная модель имеет четвертый порядок точности.

Достоверность модели относительно описания радиальных пульсаций пузырьков и их деформаций подтверждается сравнением результатов расчета ряда задач о расширении и сжатии одиночного пузырька и различных групп пузырьков с известными результатами расчетов и экспериментальными данными других авторов.

*Исследования динамики воздушных пузырьков в сферическом кластере в воде при ультразвуковом возбуждении выполнены за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00567, <https://rscf.ru/project/25-21-00567/>. Другие исследования выполнены за счет государственного задания ФИЦ КазНЦ РАН.*

#### Список литературы

- [1] Aganin A.A., Khismatullina N.A. Influence of the phase interface mass transfer characteristics on the cavitation bubble collapse in water // Ocean Engineering. 2023. V.283. 115013.
- [2] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // ТВТ. 2011. Т.49. № 2. С. 310–313.
- [3] Aganin A.A., Khismatullina N.A. Water Vapor Compression in the Regime with Dissociation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. V. 46. No. 5. P. 1945–1956.
- [4] Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С. Динамика парогазовых пузырьков // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 6. С. 56–61.
- [5] Kawashima H., Kameda M. Dynamics of a spherical vapor/gas bubble in varying pressure fields // J. of Fluid Science and Technology. 2008. V.3. N 8. P. 943–955.

## Коллапс симметрично расположенных парогазовых пузырьков в жидкости

Аганин А.А., Мустафин И.Н.

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН, Казань

Совместный коллапс парогазовых пузырьков при наличии в них неконденсируемого газа вызывает значительный интерес. Так, в конце коллапса в пузырьках могут возникать очень высокие температуры и давления [1, 2], что используется, например, в химических и биологических приложениях кавитации. Также при коллапсе могут образовываться ударно-волновые импульсы [2], расходящихся в жидкости от поверхности пузырька, что может приводить к механическим повреждениям и эрозии близлежащих твердых тел. Важность совместного коллапса пузырьков обусловлена тем, что в таком случае в результате гидродинамического взаимодействия между пузырьками достигаемые в них максимальные температуры и давления, а также интенсивность указанных ударно-волновых импульсов могут быть значительно выше, чем в случае одиночных пузырьков. Состав содержимого пузырьков (соотношение массовых долей пара и неконденсируемой газовой примеси) может оказывать значительное влияние на величину достигаемых внутри пузырьков максимальные температуры и давления, а также на интенсивность расходящихся импульсов [3].

В настоящей работе исследуются особенности совместного коллапса двух, трех и четырех парогазовых пузырьков в воде. Пузырьки одинаковы по размеру и содержанию, расположены на равном удалении друг от друга, т.е. находятся в вершинах равностороннего треугольника в случае трех пузырьков и в вершинах правильного тетраэдра в случае четырех пузырьков. Первоначально пузырьки заполнены насыщенным водяным паром и некоторым количеством неконденсируемого газа (воздуха). В начальный момент времени  $t = 0$  (в начале коллапса) окружающая пузырек жидкость (вода) неподвижна, радиусы всех пузырьков равны  $R_0 = 1$  мм, температура  $T$  и давление  $p$  воды равны  $T_L = 20^\circ\text{C}$  и  $p_L = 1$  бар, где нижний индекс  $L$  обозначает жидкость.

В используемой модели совместного коллапса симметрично расположенных одинаковых сферических парогазовых пузырьков содержимое пузырьков рассматривается как гомобарическое, жидкость как слабосжимаемая, а пар и газ в пузырьках — как совершенные газы. Данная модель может рассматриваться либо как обобщение модели совместного коллапса симметрично расположенных одинаковых сферических парогазовых пузырьков Аганина и Халитовой [4] на случай совместного коллапса парогазовых

пузырьков, либо как обобщение модели коллапса одиночного парогазового пузырька Аганина и Мустафина [3] на случай совместного коллапса симметрично расположенных одинаковых сферических парогазовых пузырьков. Данная модель включает обыкновенные дифференциальные уравнения относительно скорости жидкости на поверхности пузырьков  $u_L^+$ , давления в пузырьках  $p$  и радиуса пузырьков  $R$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{u_L^+}{c_L}\right) R \dot{u}_L^+ + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{u_L^+}{3c_L}\right) (u_L^+)^2 + 2 \left(1 - \frac{u_L^+}{4c_L}\right) u_L^+ (\dot{R} - u_L^+) = \\ & = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_L} + \frac{R}{c_L} \frac{d}{dt}\right) \frac{p_L^+ - p_L}{\rho_L} - (N-1) \frac{(R^2 \ddot{R} + 2R\dot{R}^2)|_{t=\tau}}{d}, \\ \dot{p} & = \frac{-R^2 p u^- + \Gamma(R)}{R^3 / 3 - \Phi(R)}, \end{aligned}$$

$$\dot{R} = u_L^+ + \frac{j}{\rho_L},$$

уравнения в частных производных для температуры  $T$  и массовой доли газа  $\alpha_g$  в пузырьках ( $0 < r < R$ )

$$\begin{aligned} \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} \right) & = \dot{p} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ & + (c_{pg} - c_{pv}) \rho D \frac{\partial \alpha_g}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_g}{\partial r} = \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \rho D \frac{\partial \alpha_g}{\partial r} \right),$$

и в жидкости ( $r > R$ )

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_L \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\rho_L c_{v,L} r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \kappa_L \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + u_L \frac{\partial \alpha_g}{\partial r} = \frac{1}{\rho_L r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \rho_L D_L \frac{\partial \alpha_g}{\partial r} \right).$$

Эти уравнения замыкаются граничными условиями на поверхности пузырьков

$$\left( \kappa_L \frac{\partial T}{\partial r} \right)^+ - \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right)^- = j_v l(p_v), \quad T^+ = T^-,$$

$$\left( \alpha_g j + \rho_L D_L \frac{\partial \alpha_g}{\partial r} \right)^+ = \left( \alpha_g j + \rho D \frac{\partial \alpha_g}{\partial r} \right)^- = j_g,$$

$$\alpha_g^+ = H p_g^-, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \alpha_g}{\partial r} \right|_{r=0} = 0,$$

и на бесконечном удалении от пузырьков

$$T = T_L, \quad \alpha_g = \alpha_{g\infty}.$$

Интенсивность фазовых превращений  $j_v$  определяется выражениями

$$j_v = \frac{\beta_{ac}}{\sqrt{2\pi B_v}} \left( \frac{p_s(T^+)}{\sqrt{T^+}} - \frac{\chi p_v}{\sqrt{T^-}} \right), \quad j = j_v + j_g,$$

$$\chi = e^{-\Omega^2} - \Omega \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Omega} e^{-x^2} dx \right), \quad \Omega = \frac{j_v \sqrt{B_v T^-}}{\sqrt{2} p_v}$$

В приведенных уравнениях  $r$  – расстояние от центра пузырька,  $u$  – радиальная скорость,  $\rho$  – плотность,  $d$  – расстояние между центрами пузырьков,  $N$  – число пузырьков,  $c_L$  – скорость звука в жидкости,  $\tau = d/c_L$  – временная задержка,  $c_v$  – теплоемкость при постоянном объеме,  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении,  $D$  – коэффициент бинарной диффузии,  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $H$  – константа Генри,  $j_g$  – диффузионный поток через поверхность пузырька на единицу площади,  $\beta_{ac}$  – коэффициент аккомодации,  $B_v$  – газовая постоянная пара,  $p_s(T)$  – давление насыщенного пара при температуре  $T$ ,  $l(p_v)$  – удельная теплота парообразования и конденсации при давлении пара  $p_v$ . Нижние индексы  $g$  и  $v$  обозначают газ и пар соответственно, нижний индекс  $\infty$  соответствует значениям на большом удалении от пузырьков. Верхние индексы  $(-)$  и  $(+)$  обозначают значения на внутренней и внешней сторонах поверхности пузырька. Верхняя точка означает дифференцирование по времени. Интегралы  $\Gamma(R)$  и  $\Phi(R)$  определяются по формулам из работы [3].

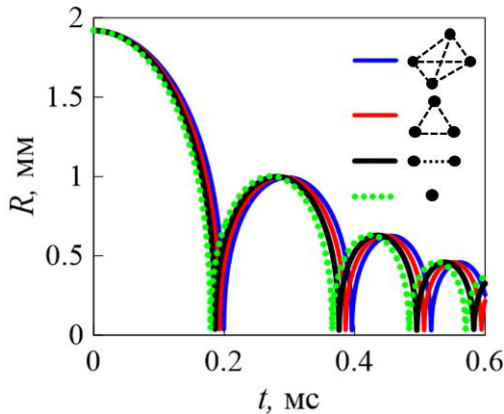


Рис. 1. Изменение радиусов пузырьков в процессе их коллапса и последующих отскоков для числа пузырьков  $N = 1, 2, 3$  и  $4$ .  $\alpha_{g0} = 0.02, \beta_{ac} = 0.075, d/R_0 = 10$

На рисунке 1 показано влияние количества пузырьков на изменение радиусов пузырьков в ходе их коллапса и последующих отскоков. Видно, что это влияние относительно невелико. Интенсивность коллапса пузырьков незначительно возрастает с увеличением  $N$ . Соответственно, радиусы пузырьков в конце

их коллапса несколько уменьшаются, в то время как соответствующее давление и температура парогазовой смеси в пузырьках несколько увеличиваются.

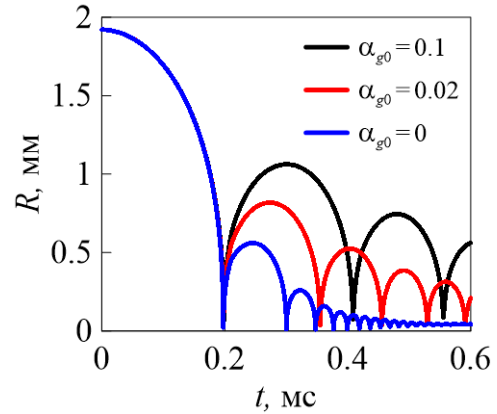


Рис. 2. Изменение радиусов пузырьков в процессе их коллапса и последующих отскоков для начальной массовой доли газа  $\alpha_{g0} = 0, 0.02, 0.1$ .  $\beta_{ac} = 0.075, N = 4, d/R_0 = 10$

На рисунке 2 показано влияние количества неконденсируемого газа в пузырьках на изменение их радиусов. Видно, что первоначально преимущественно паровые пузырьки со временем превращаются в преимущественно газовые. По мере увеличения начальной массовой доли газа этот переход становится всё более продолжительным, амплитуда отскоков возрастает, а их частота уменьшается. При увеличении начальной массовой доли газа от 0 до 0.1 максимальное давление внутри пузырьков и максимальная температура в их центрах уменьшаются примерно в 10 и 1.5 раза соответственно.

Было также показано, что при увеличении коэффициента аккомодации  $\beta_{ac}$  от 0 до 1 максимальное давление внутри пузырьков и максимальная температура в их центрах увеличиваются примерно в 30 и 2.5 раза. При увеличении числа пузырьков  $N$  от 2 до 4 их изменения довольно незначительны.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-71-00088, <https://rscf.ru/project/25-71-00088/>.

### Список литературы

- [1] Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T., Taleyarkhan R.P. Theory of supercompression of vapor bubbles and nanoscale thermonuclear fusion // *Physics of Fluids*. 2005. Vol. 17, No. 10. 107106.
- [2] Lauterborn W., Kurz T. Physics of bubble oscillations // *Rep. Progr. Phys.* 2010. Vol. 73. 106501.
- [3] Aganin A.A., Mustafin I.N. Influence of a non-condensable gas admixture inside a vapor bubble on its collapse // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025. Vol. 46, No. 5, P. 1935–1944.
- [4] Aganin A.A., Khalitova T.F. Collapse of Equal Symmetrically Located Spherical Cavitation Bubbles // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, No. 5. P. 1875–1885.

## Применение сеточно-характеристического метода для численного исследования анизотропии трещиноватых сред.

Агрелов И.Н., Хохлов Н.И.

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный

Задача моделирования волновых процессов возникает в широком спектре приложений, включая геофизику и сейсмику, где численное моделирование распространения волн используется для интерпретации сейсмических данных и исследования структуры земной коры. Кроме того, подобные задачи актуальны в теории метаматериалов, неразрушающем контроле и медицинской диагностике. В настоящей работе основное внимание уделено задачам сейсморазведки. Нефтегазовый сектор играет ключевую роль в экономике России, и одним из наиболее эффективных методов поиска углеводородных месторождений является сейсморазведка. Такие месторождения, как правило, связаны с пористыми и трещиноватыми геологическими структурами. Наличие трещин приводит к возникновению анизотропии, то есть зависимости скорости распространения волн от направления. Корректный учёт анизотропии позволяет существенно повысить точность интерпретации сейсмических данных.

Существует два основных подхода к моделированию трещиноватых сред. Первый основан на использовании эффективных моделей, в которых среда описывается набором макроскопических параметров. Этот подход отличается вычислительной эффективностью, однако он имеет ограничения применимости и не позволяет учитывать конкретную геометрию трещин. Второй подход заключается в прямом численном моделировании с явным заданием геометрии неоднородностей. Он позволяет учитывать произвольную конфигурацию трещин, но требует значительно больших вычислительных ресурсов. В данной работе представлен численный подход к исследованию анизотропии среды, содержащей трещины, заполненные флюидом.

В качестве математической модели используются уравнения линейной теории упругости. Для их решения применяется сеточно-характеристический метод [1, 2]. В качестве неоднородности использовался объект типа геологическая трещина. Для учёта раскрытия трещин и их насыщения разработана специальная сеточная модель (рис. 1), в которой трещина задаётся центральной сеткой с параметрами флюида, окружённой сетками с параметрами, соответствующими вмещающей среде. На границе

между сетками задаётся контактное условие полного слипания. Такая модель позволяет учитывать влияние заполнителя трещины на динамику волнового процесса и более точно описывать взаимодействие волн с неоднородностями.

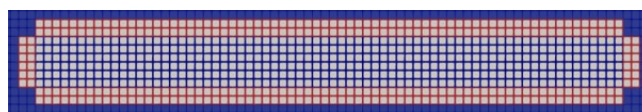


Рис. 1. Сеточная модель трещины

Для демонстрации метода был проведён ряд численных экспериментов по исследованию анизотропии трещиноватых сред. В первой задаче воспроизводились условия лабораторного эксперимента, представленного в статье [3], в котором бетонные образцы, содержащие трещины в виде дисков, насыщались водой, после чего измерялась скорость распространения волн параллельно и перпендикулярно направлению трещин. Мы воспроизвели данный эксперимент численно, перейдя к двумерной задаче. Для численного исследования скорости распространения волн трещиноватая среда была заменена двумерной вычислительной сеткой. В качестве источника возмущения использовался импульс Рикера. На Рис. 2 приведен пример моделируемой области, содержащей трещины. Белым выделены трещины, по краям области были размещены приемники для определения скорости прохождения волны. Для явного выделения границ неоднородностей использовались наложенные сетки [4]. Использование наложенных сеток позволяет независимо задавать геометрию трещин и основной области расчёта, обеспечивая точное описание границ неоднородностей без существенного увеличения вычислительных затрат. Для ускорения вычислений использовались иерархически сгущающиеся сетки, представляющие собой совокупность вычислительных сеток, в которых шаг уменьшается в областях расчетной области, требующих более высокой пространственной точности.

Сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными и теоретическими оценками представлено на Рис. 3.

Другой задачей, рассмотренной в нашем исследовании, является измерение зависимости ско-

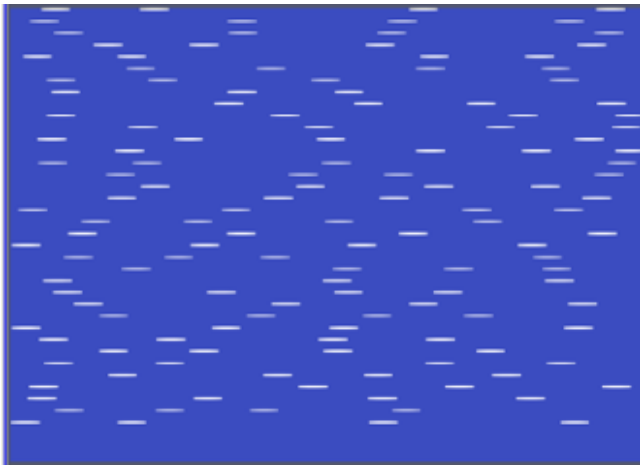


Рис. 2. Пример моделируемой области, содержащей трещины. Положение трещин выделено белым.

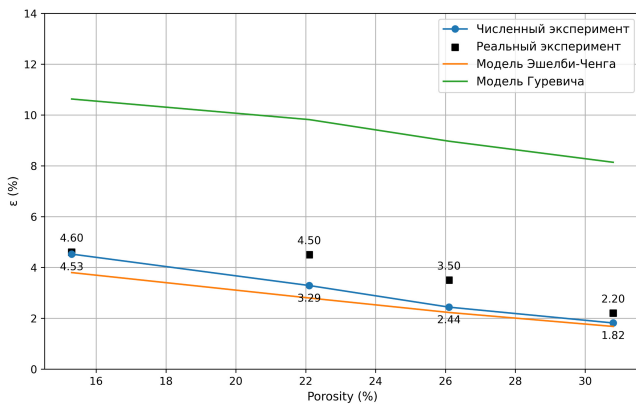


Рис. 3. Сравнение значений анизотропии, полученных в численном эксперименте, реальном эксперименте и предсказаний теоретических моделей.

рости распространения волн от угла наклона трещин. Постановка задачи основана на работе [5], в которой рассматривается теоретическая модель среды, содержащей систему параллельных трещин, ориентированных под углом к направлению распространения возмущения. Для согласования двумерной и трёхмерной постановок был проведён параметрический анализ влияния числа трещин на скорость волны при фиксированном угле, равном 0, соответствующий ориентации трещин перпендикулярно направлению распространения возмущения (Рис. 4). Было определено, что наилучшее согласие с теорией достигается при десяти трещинах. Дальнейшие расчёты выполнялись для этой конфигурации, и полученные результаты представлены на Рис. 5. Результаты численного моделирования демонстрируют качественное и количественное согласие с экспериментальными данными, что подтверждает адекватность предложенной модели

при описании волновых процессов в трещиноватых средах.

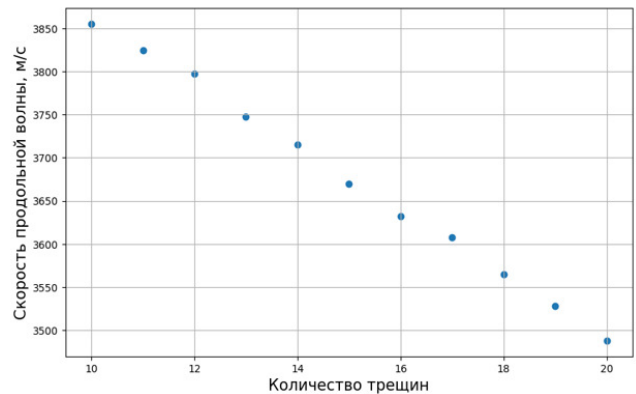


Рис. 4. Зависимость скорости от числа трещин.

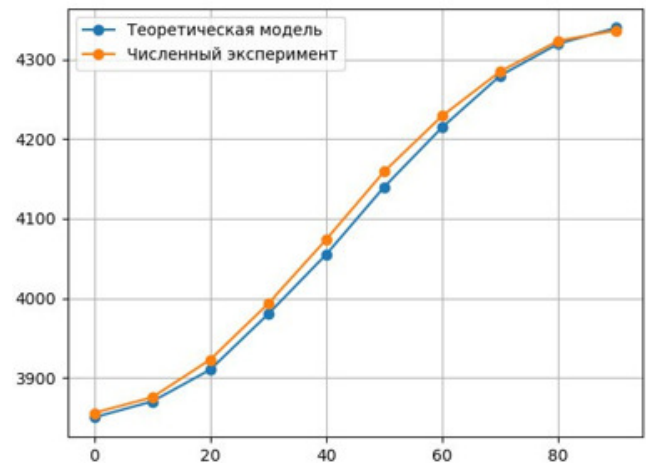


Рис. 5. Зависимость скорости от угла наклона трещин, количество трещин равно 10.

Предложенный подход может быть использован для решения широкого спектра задач, связанных с моделированием волновых процессов в сложных неоднородных средах. В частности, в рамках данной работы было проведено исследование зависимости скорости продольной волны от длины волны для различных углов наклона трещин (0°, 45°, 90°). Полученные результаты приведены на Рис. 6 и демонстрируют существенное влияние как ориентации трещин, так и соотношения длины волны и характерных размеров неоднородностей на эффективные волновые характеристики среды.

Таким образом, разработанный численный подход позволяет эффективно моделировать распространение волн в трещиноватых средах с учётом их геометрической структуры и насыщенности флюидом. Показано, что метод обеспечивает согласие с экспериментальными и теоретическими данными, а также позволяет исследовать влияние параметров трещин на анизотропию.

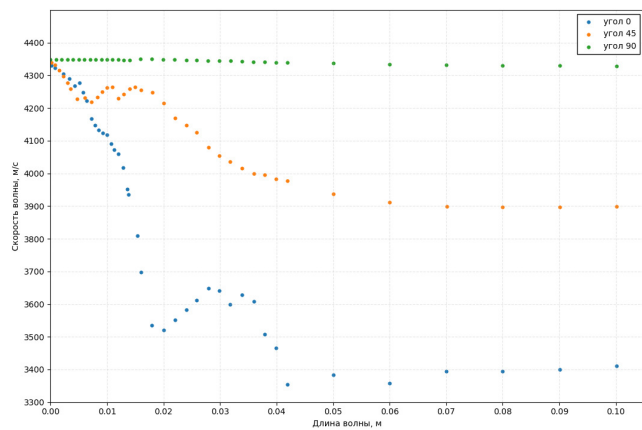


Рис. 6. Зависимость скорости от длины волны.

*Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00035-П).*

### Список литературы

- [1] Petrov I.B., Favorskaya A.V., Khokhlov N.I. Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57, No. 11. P. 1771–1777.
- [2] Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // Geophysical Prospecting. 2018. Vol. 66, No. 8. P. 1485–1502.
- [3] Zhang Y., Di B., Gao F., Li L. Effects of background porosity on seismic anisotropy in fractured rocks: an experimental study // Applied Sciences. 2023. Vol. 13, No. 14. P. 8379.
- [4] Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I. Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones // Journal of Computational Physics. 2021. Vol. 446. P. 110637.
- [5] Guo J., Han T., Fu L.-Y., Xu D., Fang X. Effective elastic properties of rocks with transversely isotropic background permeated by aligned penny-shaped cracks // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2019. Vol. 124, No. 1. P. 400–424.

# Взаимодействие малой движущейся сферы с пограничным слоем Блазиуса

Антаков Ф.В., Заметаев В.Б.

ФАУ «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского», Жуковский

В настоящее время всё большую актуальность приобретают задачи, в которых течения жидкости и газа рассматриваются на поверхности, движущейся против потока. В частности, некоторые из таких течений изучены в статьях [1–2]. В данной работе рассмотрено ламинарное обтекание плоской пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса (Рис. 1). На расстоянии  $\hat{L}$  от начала пластины и на высоте  $\hat{l}_d = \hat{L} \cdot l$ ,  $Re^{-1/2} \ll l \ll 1$  от её поверхности расположена малая сфера, движущаяся вниз по потоку с заданной скоростью  $\hat{V}_d = \hat{V}_\infty u_w$ , где  $\hat{V}_\infty$  – скорость набегающего потока. В задаче рассмотрен случай  $u_w \ll 1$ . При учете взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком, потенциал течения можно представить в виде суммы потенциалов набегающего потока, двух расположенных симметрично диполей [3] и потенциала от вытесняющего действия самого пограничного слоя.

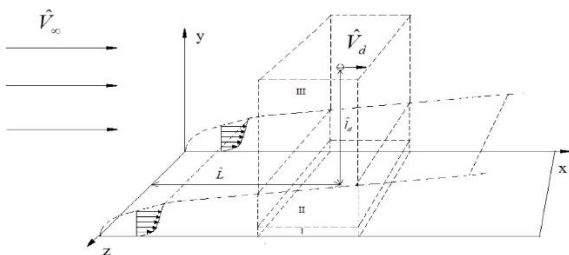


Рис. 1. Схема течения: I – вязкий подслой, II – основная часть ПС, III – потенциальный поток

Из асимптотической теории взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком [4] известно, что возмущенное давление действует, прежде всего, на вязкий тонкий подслой (область I на Рис. 1), расположенный на дне пограничного слоя. Высоту размещения диполя  $l = Re^{-3/8}h$ ,  $h = O(1)$  выберем исходя из требований теории свободного взаимодействия. Изучаемое течение является неустановившимся, но при переходе в систему координат, связанную с диполем, задача становится стационарной на движущейся вверх по потоку

пластине. Для вязкого подслоя I краевая задача примет вид:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2},$$

$$U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial Y} = 0$$

$$P = M \cdot f - \frac{1}{2\pi H} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A}{\partial \hat{x}^2} \frac{d\hat{x}d\hat{z}}{\sqrt{(X-\hat{x})^2 + (Z-\hat{z})^2}}$$

$$Y = 0: U = -U_w; V = W = 0;$$

$$Y \rightarrow \infty: U = Y + A(X, Z) - U_w + \dots; W \rightarrow 0;$$

$$|X| \rightarrow \infty, |Z| \rightarrow \infty: U = -U_w + Y, \quad W = 0;$$

$$f = \frac{2X^2 - 1 - Z^2}{2\pi(X^2 + 1 + Z^2)^{5/2}}$$

Задача содержит три независимых параметра: интенсивность диполя  $M$ , высоту расположения диполя  $H$  и скорость стенки  $-U_w$ .  $A(X, Z)$  – толщина вытеснения пограничного слоя. Из граничных условий ясно, что направления движения жидкости на нижней ( $Y = 0$ ) и верхней ( $Y \rightarrow \infty$ ) границах области различны. Это означает, что течение можно разделить на два противотока: пристенный слой, движущийся справа налево и верхний слой, текущий слева направо, см. [5]. Очевидно, что существует поверхность раздела противотоков  $Y = S(X, Z)$ , на которой продольная скорость равна нулю. Задача была решена в линейном приближении при  $M \rightarrow 0$ .

$$U(X, Y, Z) = -U_w + Y + M \cdot U_1(X, Y, Z) + \dots,$$

$$V(X, Y, Z) = M \cdot V_1(X, Y, Z) + \dots,$$

$$W(X, Y, Z) = M \cdot W_1(X, Y, Z) + \dots,$$

$$P = M \cdot P_1 + \dots, \quad A(X, Z) = M \cdot A_1(X, Z) + \dots,$$

$$S(X, Z) = U_W + M \cdot S_1(X, Z) + \dots,$$

После применения двойного преобразования Фурье по координатам  $X$  и  $Z$  к линейной задаче, решение может быть найдено через специальные функции [6] в виде:

$$\hat{V}_1(k, \zeta, l) = \frac{(k^2 + l^2)\hat{P}_1}{ikAi'(\zeta_0)} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left( \int_{\zeta_0}^{\xi} Ai(t)dt \right) d\xi,$$

$$\hat{W}_1(k, \zeta, l) = \frac{\pi i l \hat{P}_1}{(ik)^{2/3}} \left( \frac{Gi(\zeta_0)}{Ai(\zeta_0)} Ai(\zeta) - Gi(\zeta) \right),$$

$$\hat{P}_1(k, l) = \frac{\hat{f}}{1 - \frac{(ik)^{1/3} \sqrt{k^2 + l^2}}{HAi'(\zeta_0)} \int_{\zeta_0}^{\infty} Ai(t)dt},$$

$$\hat{U}_1 = \frac{i}{k} (\hat{V}_1' + i l \hat{W}_1), \quad \zeta = (-U_W + Y)(ik)^{1/3},$$

$$\zeta_0 = -U_W(ik)^{1/3}$$

Из выражения, полученного для  $\hat{P}_1(k, l)$  видно, что в знаменателе стоит сложное выражение. В ходе исследования установлено, что существует критическое значение скорости стенки  $U_W^*$ , выше которого знаменатель может обращаться в нуль и является дисперсионным соотношением. Течения, соответствующие найденным аналитическим решениям при  $U_W < U_W^*$  назовём течениями на докритическом режиме, а при  $U_W > U_W^*$  – на закритическом. Данные режимы отличаются направлением распространения возмущений: на докритическом, возмущения сносятся вниз по потоку, а при закритической скорости движения стенки – существенно распространяются вверх по течению.

**Выводы:** Найдено аналитическое решение линейной задачи в вязком подслое с противотоками, содержащее сложную картину пространственных отрывных зон даже при малых  $M$  и при различных значениях  $H$ . Найдено критическое значение  $U_W^*$  скорости стенки, ниже которой возмущения сносятся вниз по потоку, а выше – существенно вверх по потоку.

Приведем проекции линий тока на плоскость симметрии  $Z = 0, U_W = 1, H = 1, M = 0,5$  (Рис. 2):

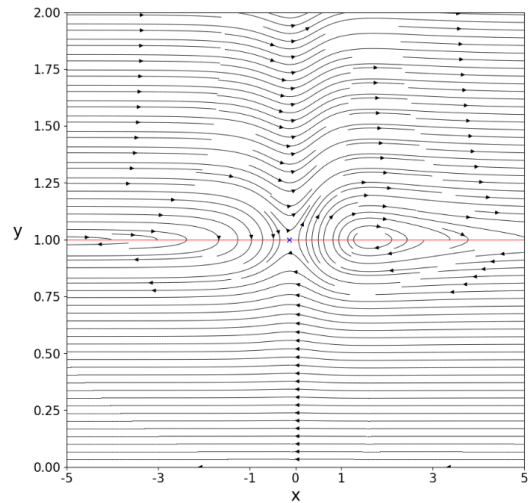


Рис. 2. Проекция линий тока на плоскость симметрии

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 23-19-00041 в ЦАГИ).

### Список литературы

- [1] Ruban, A., Araki, D., Yapalparvi, R., & Gajjar, J. On unsteady boundary-layer separation in supersonic flow. Part 1. Upstream moving separation point // Journal of Fluid Mechanics. 2011. V. 678. P. 124-155.
- [2] Yapalparvi, R., & Van Dommelen, L. Numerical solution of unsteady boundary-layer separation in supersonic flow: Upstream moving wall // Journal of Fluid Mechanics. 2012. V. 706. P. 413-430
- [3] Антаков Ф. В., Заметаев В. Б. Искажение формы сферы, смоделированной потенциальным диполем в равномерном потоке, из-за воздействия второго диполя. // Труды МФТИ. 2022. Т. 14, № 4, С. 126-132.
- [4] В. В. Сычѳв [и др.]. Асимптотическая теория отрывных течений. — М.: Наука, 1987.
- [5] Чжун Т.Х., Безродных С.И., Заметаев В.Б. Несжимаемый пограничный слой с противотоками при заданном градиенте давления. // ЖВММФ. 2022. Т. 62. № 6. С. 1007-1015.
- [6] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / пер. с английск. — М.: Наука, 1979.

## Взрывная фрагментация капель и слоев жидкостей в условиях интенсивного нагрева

Антонов Д.В.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск

Распыление эмульгированных топлив в камерах сгорания авиационных двигателей вследствие интенсивного теплового воздействия на формирующиеся капли приводит к их фрагментации в режимах паффинга и микровзрыва (рис. 1). Процессы паффинга и микровзрывного распада разнородных топлив активно исследуются [1–3]. Интерес к ним обусловлен тем, что за счет триггерствующих добавок в виде воды, спиртов, масел, эфиров можно улучшить экологические и

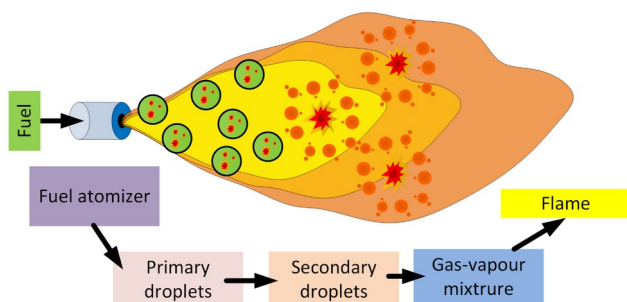


Рис. 1. Распыление эмульгированных топлив

энергетические характеристики топливосжигания [4, 5].

В данной работе приведены результаты экспериментальных и теоретических исследований по характеристикам паффинга/микровзрыва композиционных капель и слоев гетерогенных жидкостей при различных схемах нагрева. Композиционные капли жидкостей представляли структуры, в которых вода выступает в качестве ядра, а в качестве оболочки – масло/керосин. Слои несмешивающихся жидкостей содержали воду и подсолнечное масло в объемных соотношениях 9:1, 7:3, 1:1, 3:7, 1:9. Параметрические исследования с композиционными каплями жидкостей проводились при варьировании размеров и

соотношениях объемных концентраций компонентов в диапазонах от 0.01 мм до 1 мм и от 2 об.% до 10 об.% соответственно. Параметрические исследования со слоями несмешивающихся жидкостей проводились при варьировании их объемов от 1 мл до 1 л. Выполнена размерная и безразмерная математическая обработка результатов экспериментальных исследований и математического моделирования с целью получения аппроксимационных выражений для установленных зависимостей характеристик паффинга/микровзрыва композиционных капель и слоев гетерогенных жидкостей при интенсивном нагреве.

Сформулированы практические рекомендации для обеспечения условий устойчивой работы химических реакторов, медицинских зондов и камер сгорания газотурбинных двигателей на композиционных топливах.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (грант 24-79-10031, <https://rscf.ru/project/24-79-10031/>).*

### Список литературы

- [1] Ivanov V.M., Nefedov P.I. Experimental investigation of this combustion process of natural and emulsified liquid fuels // NASA Technical Transl. 1962.
- [2] Watanabe H., Okazaki K. Visualization of secondary atomization in emulsified-fuel spray flow by shadow imaging // Proc. Combust. Inst. 2013. № 34. С. 1651-1658.
- [3] Melo-Espinosa E.A., Bellettre J., Tarlet D., Montillet A., Piloto-Rodríguez R., Verhelst S. Experimental investigation of emulsified fuels produced with a micro-channel emulsifier: Puffing and micro-explosion analyses // Fuel. 2018. № 219. С. 320–330.
- [4] Antonov D.V., Piskunov M.V., Strizhak P.A. Breakup and explosion of droplets of two immiscible fluids and emulsions // Int. J. Therm. Sci. 2019. № 142. С. 30–41.
- [5] Coughlin B., Hoxie A. Combustion characteristics of ternary fuel Blends: Pentanol, butanol and vegetable oil // Fuel. 2017. № 196. С. 488–496.

## Доставка аэрозолей в легкие: эксперимент, моделирование и клинические сценарии

Антонов Д.В.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск

Современное лечение бронхолегочной патологии неразрывно связано с ингаляционным путем доставки лекарства [1]. Вдыхаемые частицы диаметром менее 5 мкм достигают терминальных отделов дыхательных путей, где лекарственные средства оказывают свое действие, частично поступая в кровоток [2]. Этот способ доставки имеет явные преимущества перед введением лекарственных средств внутрь или инъекционно [3]. Характер распределения частиц в легких (рис. 1) зависит от размера частиц и респираторных усилий [4]. При болезнях органов дыхания сложности применения ингаляционных форм доставки связаны с изменением анатомической структуры,

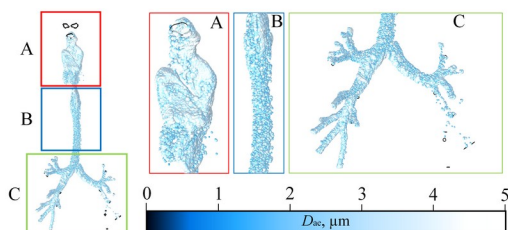


Рис. 1. Типичный характер распределения частиц в легких

профиля воздушного потока и вентиляционно/перфузионного отношения [5].

В данной работе представлены результаты прецизионных экспериментов по регистрации современных возможностей аэрозольного распыления, и предложена прогностическая модель для управления аэрозольными потоками в дыхательных путях человека, направленная на достижение максимальной депозиции с учетом индивидуальных анатомо-физиологических особенностей пациента (физиологии дыхательных путей и архитектуры трахеобронхиального дерева).

Гидродинамические элементы потоков аэрозолей получены с помощью оптических методов диагностики газожидкостных потоков на базе фазовой доплеровской анемометрии,

теневого съемки и трассерной визуализации. Протестированы три различных ингаляционных устройства доставки лекарственных препаратов: струйный небулайзер с постоянным потоком, дозирующий аэрозольный ингалятор под давлением, ингалятор по типу мягкого тумана.

Математический аппарат разработан в среде COMSOL Multiphysics с использованием модулей Heat Transfer, Fluid Flow, Particle Tracing и пользовательских функций. Установлено, что повышение температуры тела усиливает испарение аэрозолей, уменьшая их диаметр и перераспределяя депозицию между отделами дыхательных путей. Показано, что архитектура трахеобронхиального дерева критически влияет на асимметрию осаждения.

Полученные результаты обосновывают необходимость персонализации ингаляционной терапии на основе анатомии пациента, что открывает возможности для повышения эффективности лечения бронхолегочных заболеваний.

Исследование выполнено за счёт гранта Российской государственной научной фонды №24-45-00012, <https://rscf.ru/project/24-45-00012/>.

### Список литературы

- [1] Авдеев С.Н. Хроническая обструктивная болезнь легких: обострения// Пульмонология. 2013. № 3. С. 5–19.
- [2] Ainetdinov R.M., Antonov D.V., Avdeev S.N., Cao B.-Y., Kerimbekova S.A., Liu N., Merzhoeva Z.M., Nagatkina O.V., Nikitina L.Yu., Rybdylova O., Sazhin S.S., Sokolova E.S., Strizhak P.A., Suvorova O.A. Achievements and challenges of targeted drug delivery to a human respiratory tract: Bridging traditional and novel approaches to modelling and clinical needs // J. Aerosol Sci. 2026. № 191. С. 106706.
- [3] Anderson S., Atkins P., Bäckman P., Cipolla D., Clark A., Daviskas E., Disse B., Entcheva-Dimitrov P., Fuller R., Gonda I., Lundbäck H., Olsson B., Weers J. Inhaled medicines: past, present, and future// Pharmacol Rev. 2022. № 74. С. 48–118.
- [4] Antonov D.V., Nagatkina O.V., Ainetdinova (Sokolova) E.S., Sazhin S.S. Heat and mass transfer processes in drug aerosol flows in a human proximal respiratory tract// Journal of Aerosol Science. 2026. № 193. С. 106757.
- [5] Авдеев С.Н. Хроническая обструктивная болезнь легких: обострения// Пульмонология. 2013. № 3. С. 5–19.

## Амплитудно-частотные характеристики ударно-волновых импульсов, распространяющихся в водогазонасыщенном песке

Ахметов А. Т. \*\*, Гизатуллин Р.Ф. \*, Богданов Д.Р. \*\*, Азаматов М.А. \*\*\*, Мухаметзянов А.Ф. \*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа

\*\*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

\*\*\*Салым Петролеум Девелопмент, Москва

В сухой уплотнённой песчаной насыпной среде формируются усиленные переотражённые (зондирующие) ударно-волновые импульсы (УВИ) с пиками [1], амплитуда которых существенно превышает амплитуду основного импульса. При этом зондирующий импульс распространяется в среде более эффективно по сравнению с основным [2].

Насыщение порового пространства водой, даже в небольшом количестве, существенно изменяет условия распространения зондирующих импульсов и приводит к их поглощению [3]. При 8% водонасыщенности зондирующий импульс поглощается уже в слое 10,5 см, и вместо импульса приходит высокочастотный цуг. При 15% водонасыщенности на переднем фронте зондирующего импульса формируется усиленный «пузырьковый» пик, который плохо распространяется вглубь среды. При водонасыщенности от 20% до 60% пузырьковый пик практически не доходит даже до глубины 10,5 см, распадаясь на генерируемые высокочастотные колебания [3]. Некоторое исключение составляет водонасыщенность 40%, при которой как основной импульс, так и пузырьковый пик доходят до нижних датчиков в виде цугов. Наиболее характерно отражают формирование усиленного УВИ с пузырьковым пиком и его перерождения в высокочастотные колебания, по мере прохождения в среде иллюстрируют эпюры, полученные при 30% и 60% водонасыщенности.

Для анализа перераспределения ударно-волновых импульсов в водогазонасыщенной песчаной среде рассмотрена частотная структура сигналов на основе их разложения в ряд Фурье. Эксперименты проводились на вертикальной ударной трубе с секцией насыпных сред. Датчик D0 располагался в воздухе, а датчики D1, D2 и D3 — в насыпной среде на глубинах 22, 127 и 232 мм соответственно. Для каждого датчика выделялись

временные интервалы, соответствующие основному и зондирующему импульсам. Для этих сигналов выполнялось разложение в ряд Фурье с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) Python с использованием библиотеки NumPy. Анализ проводился для двух значений водонасыщенности: 30% и 60%. Амплитуда БПФ рассматривалась как мера вклада соответствующих частотных компонент в сигнал и приводилась в кПа.

Для 30% водонасыщенности (рис. 1) в спектрах сигналов датчиков D0–D3 выделяется низкочастотная область порядка 80–150 Гц. Следует отметить, что данная компонента в значительной степени определяется длительностью временных интервалов, выбранных для анализа основного и зондирующего импульсов, и поэтому характеризуется прежде всего масштаб анализируемого сигнала. В связи с этим основной интерес при сравнении спектров представляет не сама низкочастотная область, а изменение формы спектра и появление дополнительных высокочастотных составляющих. На уровне датчиков D0 и D1 спектры сохраняют сравнительно простой и узкий характер. На глубине, соответствующей датчикам D2 и D3 наблюдается качественное изменение спектральной структуры: появляется выраженная группа компонент в диапазоне 3–4 кГц, генерируемые как основным, так и зондирующими импульсами. Энергия УВИ в диапазоне частот расходится на генерацию высокочастотных импульсов, сам УВИ до глубины 12,7 мм и глубже не проходит. При 60% (рис. 2) водонасыщенности на уровне, соответствующем D1 спектральная структура остаётся сравнительно простой. Однако в более глубоких слоях наблюдаются заметные отличия: на уровне датчиков D2 и D3 спектр расширяется, также как и при водонасыщенности 30% возникают высокочастотные компоненты частотой

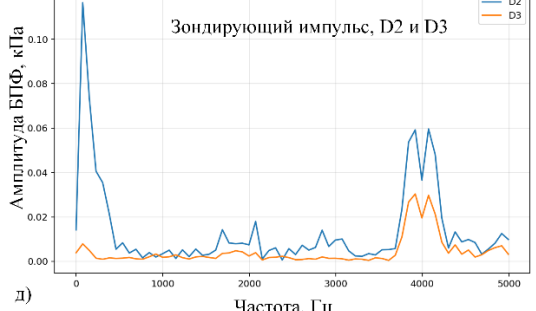
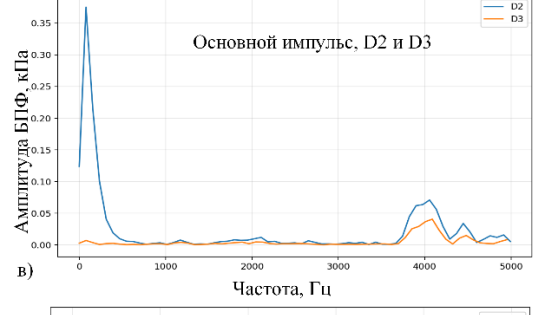
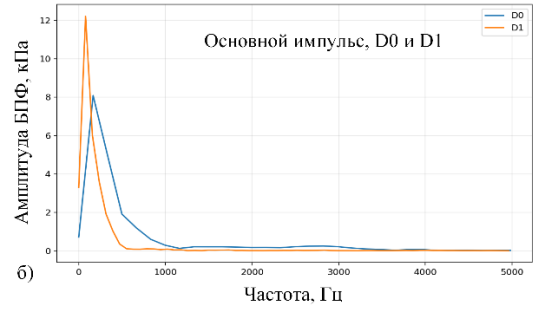
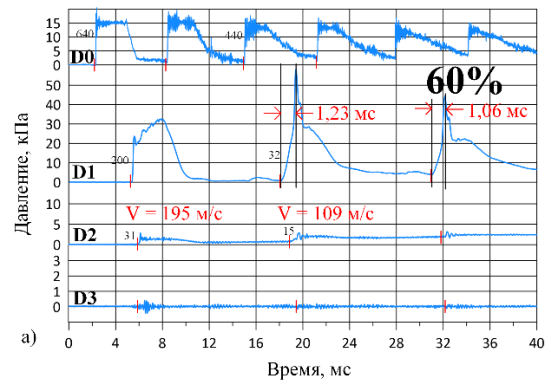
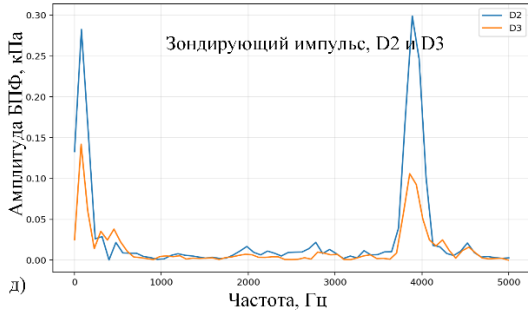
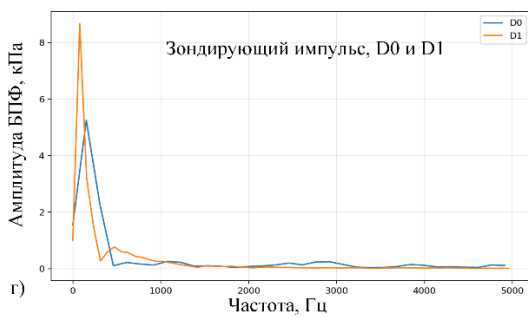
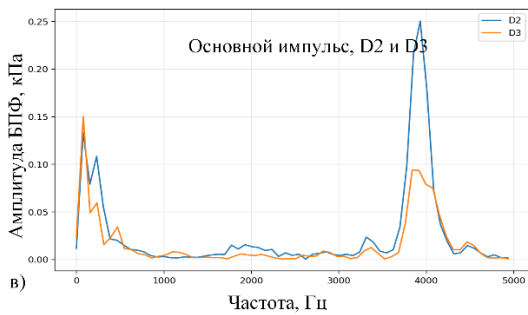
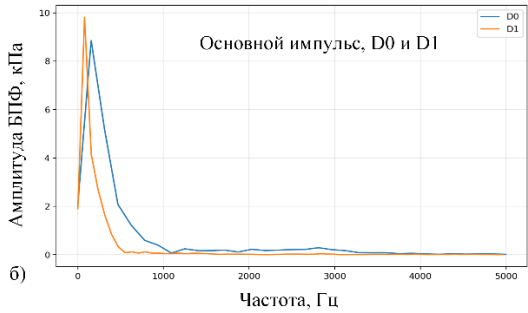
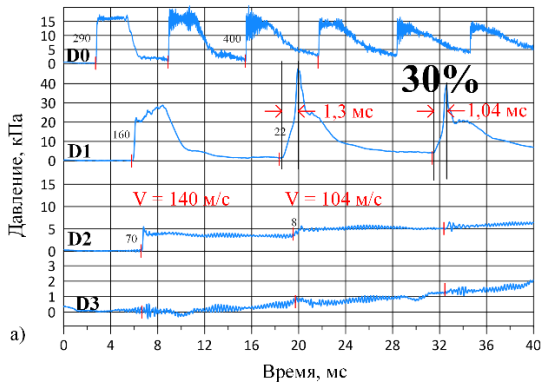


Рис. 1. а. Эпюры УВИ в воздухе и в песке при водонасыщенности 30%. б-д. Амплитудные спектры основного и зондирующего УВИ на датчиках D0-D3

Рис. 2. а. Эпюры УВИ в воздухе и в песке при водонасыщенности 60%. б-д. Амплитудные спектры основного и зондирующего УВИ на датчиках D0-D3

3–4 кГц.

Сравнение спектров основного и зондирующего импульсов показывает, что зондирующий импульс в насыпной среде имеет более сложную частотную структуру по сравнению с основным. Это особенно заметно в глубоких слоях, где после прохождения первого импульса среда оказывается структурно изменённой, и повторное воздействие сопровождается перераспределением энергии между низкочастотными и высокочастотными компонентами.

Анализ восстановления сигналов по ограниченному числу гармоник показал, что при 30% и 60% водонасыщенности сигналы на датчиках D0 и D1 хорошо аппроксимируются уже 10–20 гармониками, тогда как для датчиков D2 и особенно D3 требуется существенно большее число гармоник. Даже при использовании 50 гармоник на больших глубинах сохраняется заметная ошибка восстановления, особенно для зондирующего импульса. Это подтверждает, что с увеличением глубины и водонасыщенности сигнал приобретает всё более сложную широкополосную структуру.

Таким образом, анализ импульсов с использованием разложения в ряд Фурье показывает, что при распространении ударно-волновых импульсов в водогазонасыщенной песчаной среде можно выделить две характерные группы частот: низкочастотную (порядка 70–150 Гц) и высокочастотную (порядка 3–4 кГц). Относительный вклад

этих групп определяется как глубиной датчика, так и степенью водонасыщенности.

Заключение.

1. Разложение сигналов в ряд Фурье позволяет эффективно анализировать структуру ударно-волновых импульсов в насыпной среде.

2. В верхних слоях среда ведёт себя как низкочастотный фильтр.

3. На глубинах порядка 100–200 мм генерируются высокочастотные компоненты порядка 3–4 кГц.

4. Для восстановления сигналов на больших глубинах требуется существенно большее число гармоник, чем в верхних слоях.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00274, <https://rscf.ru/project/24-11-00274>*

#### Список литературы

- [1] Эффект усиления ударных волн в насыпных средах / А. Т. Ахметов, И. К. Гималдинов, А. Ф. Мухаметзянов, Р. Ф. Гизатуллин // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – 2024. – Т. 519, № 1. – С. 41-46. – DOI 10.31857/S2686740024060076. – EDN HVZDMN.
- [2] Ахметов А.Т., Гималдинов И.К., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф., Богданов Д.Р. Зондирование водогазонасыщенных насыпных сред переотраженными волнами непосредственно после воздействия ударной волны // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48, № 1. С. 23-26.
- [3] Ахметов А.Т., Гималдинов И.К., Мухаметзянов А.Ф., Гизатуллин Р.Ф. Особенности прохождения последовательности ударно-волновых импульсов в песке. // Материалы 16-ой международной конференции – школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах». 2025.– С. 16-19.

## Техногенные аварии на шельфе: анализ последствий и методы локализации утечек с применением защитных куполов

Бапанина Я.И., Насыров А.А.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

Аварии на нефтедобывающих платформах сопряжены с высоким риском возникновения техногенных катастроф. Повреждение буровых установок, нарушение целостности систем хранения и транспортировки углеводородного сырья, а также сбои в работе энергетического оборудования и инфраструктурных систем жизнеобеспечения платформы способны спровоцировать чрезвычайную ситуацию с тяжёлыми последствиями.

Подобные инциденты несут комплексную угрозу: во-первых, создают непосредственную опасность для жизни и здоровья персонала, задействованного на объекте; во-вторых, провоцируют масштабные экологические нарушения вследствие попадания нефти и нефтепродуктов в морскую среду. Кроме того, аварии обуславливают значительный экономический ущерб, который складывается из расходов на: ликвидацию последствий разлива; восстановление повреждённого оборудования; компенсацию нанесённого экологического вреда.

Иллюстрацией наиболее масштабного происшествия данного типа служит авария, произошедшая 20 апреля 2010 года на нефтедобывающей платформе Deepwater Horizon. Инцидент имел место в Мексиканском заливе, в 80 км от побережья штата Луизиана, и привёл к следующим катастрофическим последствиям: гибели десятка человек; выбросу в акваторию залива порядка 5 миллионов баррелей нефти; формированию нефтяного пятна площадью около 75 тысяч квадратных километров [1–3].

Одним из методов локализации утечек нефтепродуктов является применение специального защитного купола, предназначенного для сбора нефти и газа и препятствующего их распространению в водной среде. В настоящей статье представлена математическая модель процесса заполнения такого купола, учитывающая физико-химические свойства нефти, газа и воды. Кро-

ме того, в работе предложены меры по оптимизации конструкции купола с целью минимизации потенциального экологического ущерба [4, 5].

Для расчётов использовались следующие параметры:  $\rho_w=1000$  кг/м<sup>3</sup> (плотность воды),  $\rho_o=866$  кг/м<sup>3</sup> (плотность нефти),  $T_{g0} = T_{o0}=353$  К (температура приходящей смеси газа и нефти),  $h=300$  м,  $z_{up} = 20$  м,  $z_d = 5$  м,  $z_{g0}=18$  м (начальный уровень газа),  $z_{o0}=8$  м (начальный уровень нефти),  $R_r = 26$  м (радиус цилиндра),  $a = 0,85$  м (радиус скважины),  $m_g = 2$  кг/с (дебет газа),  $m_o = 3$  кг/с (дебет нефти). Рассматриваемый газ - метан.

Объём купола, при выбранных параметрах, составляет примерно 31 800 м<sup>3</sup>. Как показали расчёты, за 11 часов в куполе накапливается: нефть ~ 21 210 м<sup>3</sup> и газ ~ 8 490 м<sup>3</sup> (в условиях давления внутри купола).

Для транспортировки и утилизации накопленных ресурсов потребуются значительный флот. В пересчёте на стандартные меры объёма это составляет:

Нефть: эквивалентна объёму ~ 250 железнодорожных цистерн (при стандартной вместимости цистерны 75 м<sup>3</sup>) или грузу для трех небольших танкеров (вместимостью 6 000–10 000 м<sup>3</sup>).

Газ: в пересчёте на сжиженное состояние (при соотношении объёмов примерно 1:600) соответствует около 14 м<sup>3</sup> сжиженного природного газа (СПГ). Однако, если говорить о транспортировке газа в сжатом или сжиженном виде с платформы, потребуются специализированное судно или факельная система для его сжигания непосредственно на месте сбора.

### Список литературы

- [1] Насыров А.А., Чиглинцев И.А., Лепихин С.А. К вопросу разложения газогидрата в куполе-сепараторе, предназначенном для отбора выбросов углеводородов в шельфовой зоне // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. – 2019. – Т. 9, № 1. – С. 35-41.

- [2] Уразов Р.Р., Чиглинцев И.А., Насыров А.А. Образование склеротических отложений гидрата в трубе для отбора газа из «купола-сепаратора» // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, №5. – С.1223-1231.
- [3] Chiglintseva A.S., Nasyrov A.A., Chiglintsev I.A. Warm insulation of exhaust pipe when taking gas from the "dome - separator" installation from large depths // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 860, The International Conference on Advances in Energy Industry and Power Generation (AdvEnGen-2020) 12-14 February 2020, Almet'yevsk, Republic of Tatarstan, Russia Federation, pp. 1-6.
- [4] Чиглинцева А.С., Насыров А.А., Чиглинцев И.А., Лепихин С.А., Коледин В.В. Исследование процесса гидратообразования в откачивающем трубопроводе с теплоизоляционным покрытием при отборе газа из «купола-сепаратора» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 67. – С. 144-158.
- [5] Chiglintseva A.S., Gimaltdinov I.K., Nasyrov A.A., Chiglintsev I.A. The description of the process of decomposition of hydrate in a steel dome-separator // AIP Conference Proceedings, 2022, 2467, 080023, pp. 1-7..

## Моделирование ослабления ударной волны при детонации цилиндрического заряда в слое водной пены

Болотнова Р.Х., Шигапов А.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Изучение ослабления ударных волн в пенах является актуальной задачей механики многофазных сред, обусловленной их высокой эффективностью в снижении амплитуды и скорости распространения ударно-волновых возмущений за счет особенностей газожидкостной структуры [1], [2]. Практическая значимость задачи связана с тем, что водные пены относятся к наиболее эффективным и технологически удобным средствам взрывозащиты, поскольку способны уменьшать амплитуду давления и перераспределять энергию ударной волны за счет сжатия газовой фазы, деформации жидких пленок и интенсивного межфазного тепло- и массообмена.

Для описания поведения водной пены при интенсивных ударных нагрузках применяются двухфазные модели, в которых пена рассматривается как газокapельная смесь, которая образуется под действием ударной волны вследствие разрушения пленок, формирующих ее структуру [3], [4].

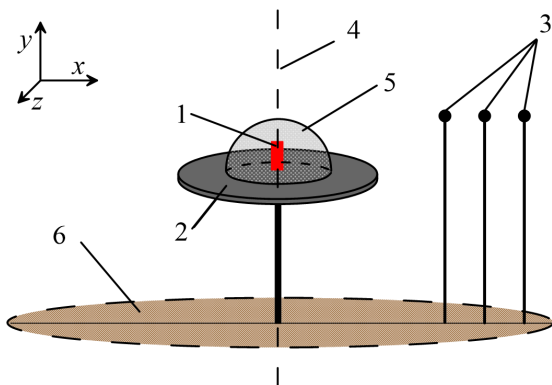


Рис. 1. Схема эксперимента [5]: 1 – заряд ВВ, 2 – жесткая подставка, 3 – датчики давления, 4 – ось симметрии, 5 – водная пена, окружающая заряд в начальном состоянии, 6 – испытательная платформа.

В работе численно исследована динамика ослабления ударной волны при детонации цилиндрического заряда С4 [5] массой  $M_{HE} = 250$  г, покрытого слоем сухой водной пены. Рассматривалась конфигурация цилиндрического заряда, соответствующая эксперименту [5]: заряд С4 располагался на жесткой подставке, а вокруг него формировалась пенная оболочка в виде полусферы радиусом  $r_{foam} = 0.3$  м, объемом  $0.05$  м<sup>3</sup>, массой 3 кг

и начальным объемным содержанием жидкой фазы  $\alpha_{10} \approx 6\%$ . Давление регистрировалось в положениях датчиков, удаленных от центра взрыва на расстояния  $x_1 = 0.8$  м,  $x_2 = 1.0$  м и  $x_3 = 1.15$  м. На рис. 1 изображена схема моделируемого эксперимента [5].

Для описания изучаемого процесса использовалась двухфазная газожидкостная модель в двухскоростном, однодавленческом и двухтемпературном приближениях. Ниже приведены уравнения неразрывности, движения и энергии для  $i$ -ой фазы.

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \text{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i) = 0,$$

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i)}{\partial t} + \text{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i \vec{v}_i) = -\alpha_i \nabla p + \text{div}(\alpha_i \tau_i) + \vec{F}_{i,drag} + \vec{F}_{i,vm} + \alpha_i \rho_i \vec{g}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i (e_i + K_i))}{\partial t} + \text{div}(\alpha_i \rho_i (e_i + K_i) \vec{v}_i) = \\ = -p \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \text{div}(\alpha_i \vec{v}_i p) - \text{div}(\alpha_i \vec{v}_i \cdot \tau_i) + \\ + \text{div} \left( \alpha_i \frac{c_{p,i}}{c_{v,i}} \gamma_i \nabla h_i \right) + K_{ht} (T_j - T_i). \end{aligned}$$

где  $\alpha_i$  – объемная доля,  $\rho_i$  – плотность,  $\vec{v}_i$  – скорость фазы,  $p$  – давление,  $T_i$  – температура. Межфазное сопротивление описывалось моделью Шиллера–Науманна,

$$\vec{F}_{i,drag} = \frac{3}{4} \alpha_i C_D \frac{\rho_2}{d_{i0}} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) |\vec{v}_i - \vec{v}_j|,$$

а межфазный теплообмен учитывался моделью Ранца–Маршалла:

$$K_{ht} = \frac{\kappa_2}{d_{10}} \text{Nu}, \quad \text{Nu} = 2 + 0.6 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3}.$$

Для описания свойств газовой фазы применялось уравнение состояния совершенного газа  $\rho = p\mu/(RT)$ , которое учитывало свойства воздушной среды при низких и средних температурах, а при достижении сверхвысоких температур –

свойства газовых продуктов детонации ВВ. Жидкая фаза описывалась уравнением состояния  $\rho = p / (\Gamma_{CVI} T) + \rho_0$ , где  $\Gamma$  — коэффициент Грюнайзена [6].

Для начального импульса, моделирующего взрыв заряда ВВ, имеющего форму цилиндра, использовались следующие распределения для давления, температуры и объемного содержания газовой фазы:

$$p(0, x, y) = p_0 + \Delta p \exp \left[ - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right],$$

$$T(0, x, y) = T_0 + \Delta T \exp \left[ - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right],$$

$$\alpha_2(0, x, y) = \alpha_{20} + \Delta \alpha_2 \exp \left[ - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right].$$

где  $p_0, T_0, \alpha_{20}$  — давление, температура и объемное содержание газовой фазы невозмущенной среды,  $a, b$  — параметры импульса,  $\Delta p, \Delta T, \Delta \alpha_{20}$  — максимумы соответствующих избыточных значений.

Численная реализация выполнена в программном комплексе OpenFOAM [6] на базе модифицированного решателя twoPhaseEulerFoam с внедрением авторского уравнения состояния. Расчеты проводились в двумерной осесимметричной постановке с использованием схемы PIMPLE при дискретизации по времени  $\Delta t \approx 10^{-6}$  с и по пространству  $\Delta x, \Delta y \approx 0.005$  м.

На рис. 2 показано сравнение расчетных и экспериментальных временных зависимостей для профилей давлений для датчиков, расположенных на указанных расстояниях от центра взрыва.

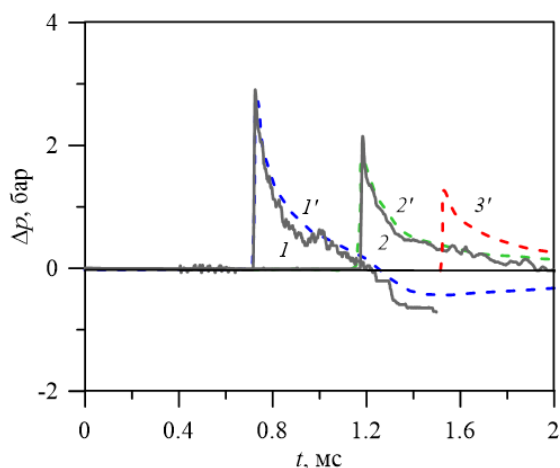


Рис. 2. Временные расчетные (1', 2', 3') и экспериментальные (1, 2) [5] зависимости для давлений  $p$  в соответствии с расстояниями от центра взрыва ВВ  $M_{HE} = 250$  г: 0.8, 1.0 и 1.15 (м) при покрытии его слоем водной пены.

Сопоставление расчетных и экспериментальных осциллограмм давления показало хорошее согласование по времени прихода фронта, форме импульса и величинам пиковых давлений. При распространении волны через пенную оболочку наблюдалось существенное затухание амплитуды: на дальних датчиках пиковое избыточное давление снижалось примерно в 2.5 раза по сравнению со случаем взрыва в газе.

Анализ полей давления, температуры и объемного содержания газовой фазы показал, что в начале процесса сильная ударная волна вызывает интенсивное испарение капель. По мере продвижения фронта ударной волны его интенсивность уменьшается и в пене формируется область с пониженной плотностью, содержащая тонкий слой газокapельной структуры с повышенным водосодержанием. Отмеченные особенности эволюции ударной волны в процессе взаимодействия с водной пеной приводят к значительной диссипации энергии взрыва.

В условиях рассматриваемой задачи получены оценки безопасных расстояний для человека. При кратковременном воздействии  $\Delta p_{max} < 0.34$  бар получено  $l_{safe} > 2.3$  м, а с учетом удвоения давления при отражении от человека безопасное пиковое давление уменьшается до  $\Delta p_1 < 0.17$  бар и расчетное расстояние увеличивается до  $l_{safe} > 3.9$  м. Таким образом показано, что слой сухой водной пены способен эффективно снижать поражающее действие взрыва и может рассматриваться как перспективный защитный барьер в аварийных и чрезвычайных ситуациях.

Работа выполнена при финансовой поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

### Список литературы

- [1] Monloubou M., Le Clanche J., Kerampran S. New experimental and numerical methods to characterise the attenuation of a shock wave by a liquid foam // AFM. 2019. No. 255125.
- [2] Monson K.L., Kyllonen K.M., Leggitt J.L. et al. Blast suppression foam, aqueous gel blocks, and their effect on subsequent analysis of forensic evidence // J Forensic Sci. 2020. Vol. 65, No 6. Pp. 1894–1907.
- [3] Bolotnova R. Kh., Gainullina E.F. Wave dynamics and vortex formation under the impact of a spherical impulse on the boundary between gas and aqueous foam // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1268. No. 012015.
- [4] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Моделирование динамики ударного воздействия на водные пены с учетом вязкоупругих свойств и явлений синерезиса // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 5. С. 28–32.
- [5] Khurshid A., Malik A.Q. Experimental studies on blast mitigation capabilities of conventional dry aqueous foam // AIP Advances. 2020. Vol. 10. No. 065130.
- [6] OpenFOAM. The Open source computational fluid dynamics (CFD) toolbox [Электронный ресурс]. <http://www.openfoam.com>

## Энергетический критерий корректности уравнений плоской задачи механики стержней

Гаврюшин С.С., Сорокин Ф.Д., Мешалкин Н.Г.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Рассматриваются варианты систем дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих краевую задачу механики стержней с учетом растяжимости оси стержня (учет осевых деформаций). Учет осевых деформаций является критически важным для материалов с эффектом памяти формы, эластомеров, пластиков. Данная задача является практически значимой, так как плоские стержни в качестве частного случая трехмерного стержня нашли широкое применение в машиностроении, приборостроении, авиастроении и других областях техники. В разных источниках приводятся разные версии СДУ, дающие различные результаты при решении одной краевой задачи. Для изыскания верного варианта используется энергетический критерий корректности: проверяется выполнение закона сохранения энергии (ЗСЭ) для полученного решения краевой задачи.

СДУ (1) из [1], встречающаяся также в [2-4] считается одной из канонических для рассматриваемой задачи:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \cos \theta; \\ \frac{dy}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \sin \theta; \\ \frac{d\theta}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) k; \\ \frac{dQ}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) (kN + q_n); \\ \frac{dN}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) (-kQ - q_\tau); \\ \frac{dk}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \frac{Q}{EJ} + \frac{d^2\theta_0}{ds_0^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x, y, \theta, k$  – декартовы координаты, угол наклона и кривизна оси стержня в деформированном состоянии;  $\theta_0$  – угол наклона оси стержня в исходном состоянии;  $N, Q$  – осевая и поперечные силы в сечении стержня;  $E, J$  – модуль упругости материала;  $A, J$  – площадь и момент инерции поперечного сечения стержня (в [1] площадь сечения обозначена  $F$ );  $q_n, q_\tau$  – нормальная и касательная распределенные нагрузки;  $s_0$  – длина дуги в исходном состоянии (в [1] дуга исходного состояния обозначена символом  $s$  без индекса).

Два обозначения в (1) изменены по сравнению с [1] с целью добиться единообразия обозначений в этой и последующих СДУ из данной статьи. На рис. 1,

который заимствован из [1] с небольшими изменениями, показаны те же величины, что и в (1).

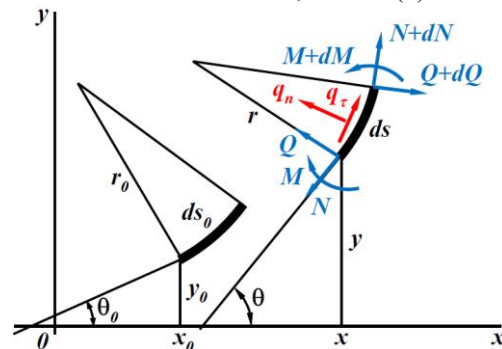


Рис. 1. Бесконечно малый элемент стержня в исходном и деформированном состояниях ( $ds$  – длина элемента в деформированном состоянии;  $M$  – изгибающий момент)

В (1) не входит явно изгибающий момент, но при выводе этой системы в [1] использовалось выражение для изгибающего момента и связанные с ним соотношения (2)

$$\begin{aligned} M &= EJ(k - k_0); \\ k_0 &= \frac{d\theta_0}{ds_0}; \quad k = \frac{d\theta}{ds}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$ds = (1 + \varepsilon) ds_0; \quad \varepsilon = \frac{N}{EA},$$

где  $k_0$  – кривизна оси стержня в исходном состоянии;  $\varepsilon$  – осевая деформация;  $M$  – изгибающий момент (см. рис. 1).

С целью проверки совместности СДУ (1) с законом сохранения энергии рассмотрим задачу о нагружении плоской полукруглой арки сосредоточенной силой (рис. 2).

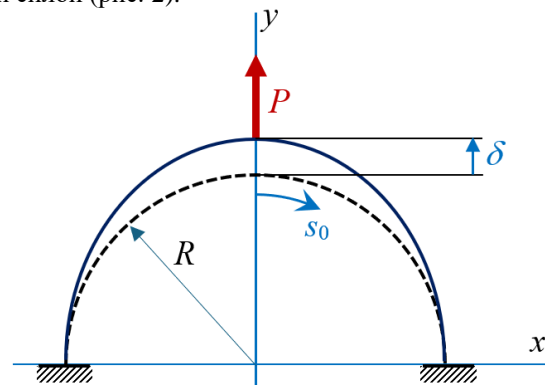


Рис. 2. Нагружение арки сосредоточенной силой

С учетом симметрии граничные условия для задачи, показанной на рис. 2, имеют вид:

$$\begin{aligned} x(0) = 0; \theta(0) = 0; Q(0) = \frac{P}{2}; \\ x\left(\frac{\pi R}{2}\right) = R; y\left(\frac{\pi R}{2}\right) = 0; \theta\left(\frac{\pi R}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для численного решения нелинейной краевой задачи были заданы следующие значения исходных параметров, функции угла наклона и распределенных нагрузок:

$$\begin{aligned} R = 0.2\text{ м}; EA = 500\text{ Н}; EJ = 7\text{ Нм}^2; P_{\max} = 200\text{ Н}; \\ 0 \leq P \leq P_{\max}; \theta_0 = -\frac{s_0}{R}; q_\tau = q_n = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Подчеркнем, что численные исходные данные в (4) были выбраны произвольным образом и могут не иметь никакого отношения ни к какой реальной конструкции, так как целью является лишь контроль СДУ (1), а не расчет конкретной арки.

Нелинейная краевая задача для СДУ (1) с граничными условиями (3) и параметрами (4) решалась стандартными средствами компьютерного математического пакета Wolfram Mathematica [5]. Сила  $P$  изменялась с шагом 0.5Н и для каждого нового значения силы находились все компоненты вектора состояния СДУ (1) в каждой точке арки.

Для финального значения  $P=200\text{ Н}$  была определена энергия деформаций  $U$ . При вычислении энергии деформаций по соотношению (5) учитывались изгиб и растяжение-сжатие.

$$U = 2 \int_0^{\pi R/2} \left( \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EJ} \right) ds_0, \quad (5)$$

где изгибающий момент  $M$  определялся по формуле (2).

Работа внешней силы  $A$  вычислялась как интеграл по пути нагружения:

$$A = \int_0^{\delta_{\max}} P d\delta; \quad \delta = y(0) - R, \quad (6)$$

где  $\delta$  – перемещение точки приложения силы (рис. 2);  $\delta_{\max}$  – значение  $\delta$  при  $P=P_{\max}$ . Так как нагружение выполнялось дискретно, то интегрирование в (6) было заменено конечной суммой с использованием метода трапеций:

$$A \approx \sum_{i=1}^n \frac{P_{i-1} + P_i}{2} (\delta_i - \delta_{i-1}), \quad (7)$$

где  $i$  – номер шага нагружения;  $n$  – количество шагов нагружения. Для  $n=400$  (шаг нагружения  $\Delta P=0.5\text{ Н}$ ) результаты вычислений показаны в табл. 1.

Таблица 1. Контроль ЗСЭ для СДУ (1)

Энергия $U$ , Дж	5.81
Работа $A$ , Дж	4.95
Относительная погрешность	≈15%

Чрезвычайно большая величина погрешности, полученная при расчете, показывает, что СДУ (1) не прошла проверку на соответствие ЗСЭ. Причиной этого является неправильное соотношение упругости (2). Кривизна стержня меняется по двум причинам: 1 – из-

за поворотов оси, 2 – из-за деформаций оси. Вторая причина не приводит к изгибающим моментам, что становится совершенно очевидным на примере раздувания сферической оболочки внутренним давлением (футбольный мяч). В уравнениях (1) и (2) этот факт не учитывается, хотя указанная особенность кривизны хороша известна, например, из теории оболочек.

Чтобы СДУ (1) удовлетворяла энергетическому критерию корректности предлагается изменить соотношение упругости для моментов, приведя его по аналогии с теорией оболочек [6] к виду:

$$M = EJ((1+\varepsilon)k - k_0). \quad (8)$$

Замена некорректной формулы (2) на корректную формулу (8) при выводе СДУ приводит к довольно громоздким выкладкам, так как деформация оси  $\varepsilon$  попадает под знак производной и количество слагаемых увеличивается. Т.е., использование кривизны деформированной оси  $k$  в качестве одной из основных неизвестных перестает быть привлекательным. В связи с этим для исправления СДУ (1) целесообразно в качестве основной неизвестной использовать не кривизну, а изгибающий момент. Также целесообразным считается спроецировать неизвестные на неподвижные оси декартовой системы координат. Полученная СДУ примет вид (9):

$$\begin{cases} \frac{du_x}{ds_0} = (1+\varepsilon)\cos\theta - \cos\theta_0; \\ \frac{du_y}{ds_0} = (1+\varepsilon)\sin\theta - \sin\theta_0; \\ \frac{d\vartheta}{ds_0} = \frac{M}{EJ}; \\ \frac{dQ_x}{ds_0} = -(1+\varepsilon)q_x; \\ \frac{dQ_y}{ds_0} = -(1+\varepsilon)q_y; \\ \frac{dM}{ds_0} = (1+\varepsilon)(Q_x \sin\theta - Q_y \cos\theta), \end{cases} \quad (9)$$

где  $Q_x, Q_y$  – проекции внутренних сил на оси декартовой системы координат;  $q_x, q_y$  – проекции внешних распределенных нагрузок на оси декартовой системы координат;  $u_x, u_y$  – проекции перемещений на оси декартовой системы координат;  $\vartheta$  – поворот.

На рис. 3 показаны величины, представленные в (9).

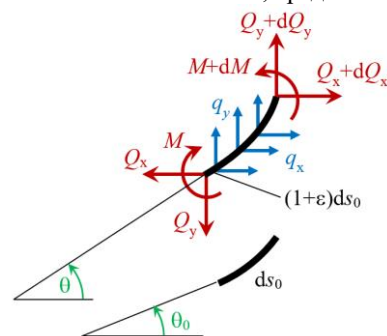


Рис. 3. Внутренние силовые факторы и внешние нагрузки в декартовой системе координат

Для замыкания системы (9) к ней необходимо добавить алгебраические соотношения (10):

$$\theta = \theta_0 + \vartheta; \quad \varepsilon = \frac{Q_x \cos \theta + Q_y \sin \theta}{EA}. \quad (10)$$

Отметим, что в [7] выведена аналогичная СДУ, которая отличается от (9) лишь несущественными деталями.

Для СДУ (9) была решена краевая задача, аналогичная задаче, решенной для СДУ (1). Вычисление работы и энергии было проведено аналогично. Результаты представлены в табл. 2. Специально показаны по 8 значащих цифр энергии и работы, чтобы ни у кого не возникло сомнений в корректности СДУ (9).

Таблица 2. Контроль ЗСЭ для СДУ (9)

Энергия $U$ , Дж	5.2905149
Работа $A$ , Дж	5.2905141
Относительная погрешность	$1.4 \cdot 10^{-7}$

Таким образом именно (9) является корректной с точки зрения выполнения ЗСЭ системой дифференциальных уравнений, описывающих плоскую задачу механики стержней с учетом осевых деформаций. Именно данная система рекомендуется для практического применения в численных расчетах плоских кри-

волинейных стержневых элементов, для которых существенным является учет осевой деформации, в том числе вызванных фазовыми переходами, термическими, пьезоэлектрическими и другими эффектами.

### Список литературы

- [1] Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. Москва, Наука, 1988, 232с
- [2] Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной механике и математике). Москва, Эдиториал УРСС, 1999, 224с.
- [3] Гаврюшин С.С. Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014, 479с.
- [4] Гаврюшин С. С. Расчет элементов коммутационных и исполнительных устройств, выполненных из сплавов с памятью формы. Проблемы машиностроения и надежности машин, 2019, № 7, с. 6-14.
- [5] Вавилов Н.А., Халин В.Г., Юрков А.В. Mathematica для нематематика. Москва, МЦНМО, 2021, 483 с.
- [6] Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. Москва, Ленанд, 2017, 486 с.
- [7] Левин В. Е., Пустовой Н.В. Механика деформирования криволинейных стержней. Новосибирск, НГТУ, 2008, 207 с.

## Акустика жидкости с покрытыми анизотропной оболочкой каплями при наличии фазовых переходов

Гафиятов Р.Н.

Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

В настоящее время значительный интерес представляют исследования эмульсий с фазовыми переходами. Под действием ультразвука внутри капель жидкости образуются пузырьки пара. Этот процесс известен как акустическое испарение капель [1]. Использование данных эмульсий имеет огромный потенциал в биомедицине [2, 3], поскольку, в отличие от обычных газовых микропузырьков капли жидкости могут быть достаточно маленькими и могут спокойно протекать через тонкие капилляры. К примеру, при использовании эхографической визуализации капли жидкости, протекающие через сосудистую систему опухолей, могут испаряться и использоваться в качестве контрастных веществ для получения изображения внутренней структуры опухоли [4]. В качестве капель жидкости обычно используют различные капли перфторуглерода [5, 6, 7]. Выбор данных веществ связан с тем, что они остаются метастабильными при физиологической температуре и не могут самопроизвольно испаряться. Для их испарения требуется акустическая энергия.

Распространение акустических волн в многофракционных пузырьковых жидкостях с газовыми и парогазовыми пузырьками различных размеров и состава исследована в [8, 9]. В работах [10, 11] изучено распространение акустических волн в смеси жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой. В настоящей работе проведено исследование распространения акустических волн в жидкости с покрытыми анизотропной оболочкой каплями при наличии фазовых переходов.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 25-21-00514), <https://rscf.ru/project/25-21-00514/>.*

### Список литературы

- [1] Kripfgans O.D., Fowlkes J.B., Miller D.L., Eldevik O.P., Carson P.L. Acoustic droplet vaporization for therapeutic and diagnostic applications // *Ultrasound Med. Biol.* 2000. Vol. 26. P. 1177–1189.
- [2] Sheeran P.S., Dayton P.A. Phase-change contrast agents for imaging and therapy // *Curr. Pharm. Des.* 2012. Vol. 18. P. 2152–2165.
- [3] Kee A.L.J., Teo B.M. Biomedical applications of acoustically responsive phase shift nanodroplets: current status and future directions // *Ultrason. Sonochem.* 2019. Vol. 56. P. 37–45.
- [4] Rapoport N., Gao Z., Kennedy A. Multifunctional nanoparticles for combining ultrasonic tumor imaging and targeted chemotherapy // *J. Natl Cancer Inst.* 2007. Vol. 99. P. 1095–1106.
- [5] Sheeran P.S., Wong V.P., Luois S., McFarland R.J., Ross W.D., Feingold S., Matsunaga T.O., Dayton P.A. Decafluorobutane as a phase-change contrast agent for low-energy extravascular ultrasonic imaging // *Ultrasound Med. Biol.* 2011. Vol. 37. P. 1518–1530.
- [6] Sheeran P.S., Luois S., Dayton P.A., Matsunaga T.O. Formulation and acoustic studies of a new phase-shift agent for diagnostic and therapeutic ultrasound // *Langmuir.* 2011. Vol. 27. P. 10412–10420.
- [7] Sheeran P.S., Luois S., Mullin L.B., Matsunaga T.O., Dayton P.A. Design of ultrasonically-activatable nanoparticles using low boiling point perfluorocarbons // *Biomaterials.* 2012. Vol. 33. P. 3262–3269.
- [8] Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в многофракционных пузырьковых жидкостях // *ТВТ.* 2015. Т. 53, № 2. С. 250–255.
- [9] Губайдуллин Д.А., Гафиятов Р.Н. Динамика волн в многофракционных пузырьковых жидкостях // *ИФЖ.* 2017. Т. 90, № 6. С. 1506–1511.
- [10] Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой // *Изв. РАН. МЖГ.* 2019. № 2. С. 126–133.
- [11] Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустика вязкоупругой жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой // *ИФЖ.* 2022. Т. 95, № 3. С. 802–810.

## Численное решение начально-граничной задачи о воздействии ударного импульса на слой насыпной среды при повторном отражении

Гималдинов И.К., Родионов А.С., Валиахметова О.Ю., Шираева А.А., Закирова Э.Р.

\*ФГБОУ ВО Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

Исследование распространения упругих волн в пористых средах представляет собой фундаментальную задачу [1], имеющую широкий спектр прикладного использования в науке и технике. Это находит применение в таких областях, как геофизика, где волны используются для изучения структуры земной коры, в инженерии, где пористые материалы применяются для поглощения ударных волн и в качестве звукоизоляционных материалов. Одним из основных параметров, характеризующим упругие свойства пористой среды, является степень уплотнения материала. Насыпные материалы, такие как песок или стеклянные шарики, характеризуются низкой скоростью звука, порядка 100 м/с. Однако при увеличении степени уплотнения, как, например, в случае песчаника или при цементировании газогидратом, скорость распространения акустических волн значительно возрастает [2], достигая значений 2000-3000 м/с.

В данной работе проведено теоретическое исследование динамики ударно-волнового импульса (УВИ). Расчеты проведены применительно к экспериментам, выполненным на ударной трубе [3], представленной на рис.1. Установка включает камеру высокого давления (КВД), камеру низкого давления (КНД) и секцию с насыпным пористым материалом. Пьезоэлектрические датчики, расположенные на внутренней поверхности трубы, регистрировали амплитуду полного напряжения УВИ, возникающего при разрыве диафрагмы между КВД и КНД. Волна, проходя через насыпной пористый слой, многократно отражается от внутренней поверхности материала и верхнего торца трубы, что позволяет проводить анализ изменений в пористой среде, вызванных повторными прохождениями УВИ с периодичностью около 10 миллисекунд.

Описанные задачи приводят к необходимости решения начально-граничной задачи [4],

включающую в данном случае уравнения сохранения массы, импульса и энергии для газовой фазы и твердых частиц, а также замыкающие соотношения. Процесс описывается в рамках одномерного плоского движения газовой и дисперсной фаз. Численное решение задачи проводится методом контрольного объема, что позволяет эффективно аппроксимировать уравнения динамики. Моделирование проводилось с учетом реальных условий экспериментальной установки, что должно обеспечить высокую степень соответствия между численными расчетами и экспериментальными данными.

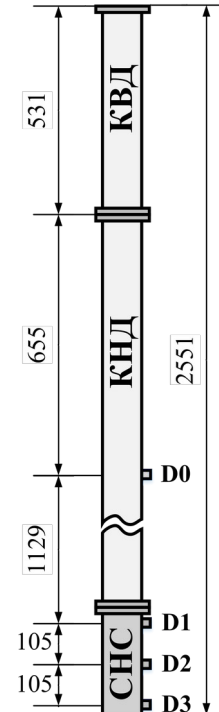


Рис. 1. Схема установки

В рамках предложенной математической модели выполнено сопоставление расчетов с экспериментальными осциллограммами, полученными при прохождении ударно-волнового импульса через пористую среду. В эксперименте,

в результате разрыва диафрагмы, между КНД и КВД образовался УВИ, движущийся в направлении слоя песка толщиной 258 мм. Давление в КНД совпадало с атмосферным, а в КВД – превышало атмосферное на 0.41 кПа. Датчики D1-D3 были погружены в песок, а D0 регистрировал давление в газовой фазе. Помимо первого прохождения УВИ, учитывалось также и второе, полученное отражением УВИ от верхней границы ударной трубы.

Результаты сопоставления расчетных и экспериментальных осциллограмм приведены на рис. 2. Расчеты выполнялись для песка и воздуха при значениях термодинамических параметров газовой и дисперсной фаз, аналогичных экспериментальным значениям.

Как следует из анализа рис. 2, показания датчика D0 дают очень высокую степень согласования результатов расчетов с экспериментом. На датчиках D1-D3 модель хорошо описывает первое прохождение УВИ через слой насыпной среды, однако при повторном прохождении (момент времени между 21.0 и 21.7 мс) наблюдается заметное отклонение в виде характерного «пика». На данный момент известны попытки описания указанного «пика», например, в работе [5] получен аналогичный пик за счет отраженного импульса от нижнего торца ударной трубы, однако это противоречит результатам эксперимента, и авторы указывают на необходимость проведения дальнейших исследований в данной области.

Таким образом, результаты исследования демонстрируют достаточно высокую точность и эффективность предложенной методики, что открывает новые возможности для дальнейшего изучения динамики упругих волн в пористых материалах и их применения в различных областях науки и техники.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00274, <https://rscf.ru/project/24-11-00274>*

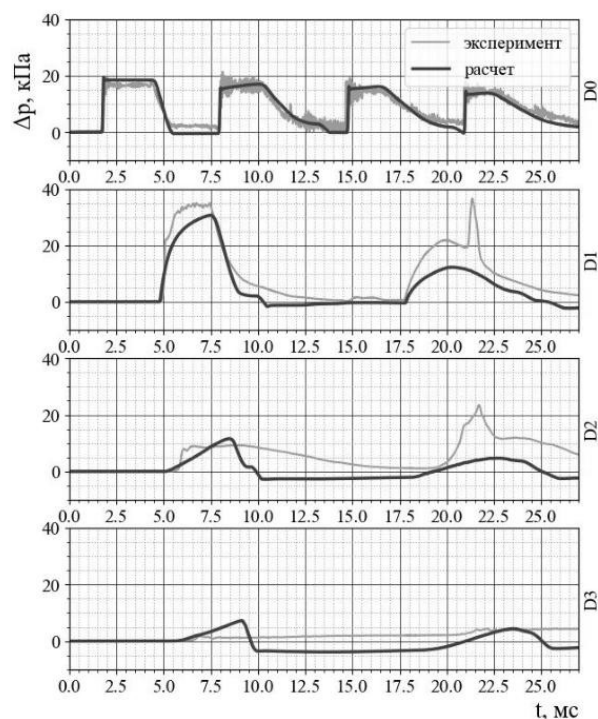


Рис. 2. Расчетные (черная линия) и экспериментальные (серая линия) осциллограммы для датчиков D0-D3

### Список литературы

- [1] Gubaidullin A.A., Britan A., Dudko D.N. Air shock wave interaction with an obstacle covered by porous material // *Shock waves*, 2003, Vol. 13, No. 1, 41-48.
- [2] Лукин, С. В. К оценке скоростей распространения акустических волн в релаксирующей насыщенной пористой среде / С. В. Лукин, С. Ф. Урманчеев // *Труды Института механики Уфимского научного центра РАН.* – 2010. – Т. 7. – С. 153-162. – DOI 10.21662/uim2010.1.013. – EDN
- [3] Ахметов А. Т., Азаматов М. А., Мухаметзянов А. Ф. Изменение структуры ударных волн в насыпных средах при переотражении // *Многофазные системы.* 2020. Т. 15. № 1-2. – С. 10-10.
- [4] Gimaltdinov I. K., Rodionov A. S., Valiakmetova O. Yu. Numerical Solution of the Initial Boundary Value Problem of the Impact of a Shock Pulse on a Layer of a Bulk Medium // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2024, Vol. 45, No. 11, pp. 5396–5404.
- [5] Уткин П.С., Чупров П.А. Численное моделирование распространения зондирующих импульсов в плотной засыпке гранулированной среды // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2024. Т. 16, № 6. С. 1361–1384.

## Трехмерное моделирование прорыва глинистого флюидоупора трещиной авто-ГРП в слоистой поропругой среде

Гришко И.Д.\* , Байкин А.Н.\*\* , Абдуллин Р.Ф.\*\* , Копейкин Р.Р.\*\*

\*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, д. 1, 630090, Новосибирск, Россия

\*\*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, пр. Акад. Лаврентьева, д. 15, 630090, Новосибирск, Россия

\*\*\*Группа компаний «Газпром нефть», ул. Почтамтская, д. 3–5 литера А, 190000, г. Санкт-Петербург, Россия

Для повышения нефтеотдачи на месторождении применяется метод поддержания пластового давления, который заключается в закачке в нефтегазоносный пласт воды через нагнетательные скважины. Повышение забойного давления на нагнетательной скважине при достижении некоторого критического уровня, называемого давлением разрыва породы, влечет инициацию роста трещины самопроизвольного гидроразрыва пласта (авто-ГРП). Явление авто-ГРП может приводить к преждевременному обводнению добывающих скважин, а также прорыву трещины через глинистые флюидоупоры (покрышки) и закачке флюида в соседние пласты участка разработки. Непродуктивная закачка флюида является нежелательной, поскольку она увеличивает экономические и эксплуатационные издержки, однако не способствует увеличению нефтеотдачи. Для предотвращения лишней траты ресурсов необходимо проектирование системы поддержания пластового давления с контролем авто-ГРП, что возможно реализовать с применением инструментов на основе математического моделирования.

В данной работе исследуется распространение трещины авто-ГРП в трехмерной симметричной постановке в слоистой поропругой среде. В рамках численного моделирования рассмотрены случаи распространения трещины гидроразрыва в коллекторе, ограниченном толстыми низкопроницаемыми покрышками с перепадом минимальных сжимающих напряжений  $\Delta\sigma_h$  между покрышкой и коллектором, а также случаи распространения трещины в среде с тремя коллекторами и четырьмя покрышками: центральный коллектор отделен от двух других тонкими низкопроницаемыми покрышками с одинаковым перепадом минимальных сжимающих напряжений  $\Delta\sigma_h$ . В силу симметрии задачи допустимо провести решение в 1/8 части исходной области.

Для решения задачи о распространении трещины в областях, изображенных на рис. 1, решаются уравнение равновесия в линейной поропругой среде без учета силы тяжести в квазистационарной постановке и уравнение фильтрации однофазной

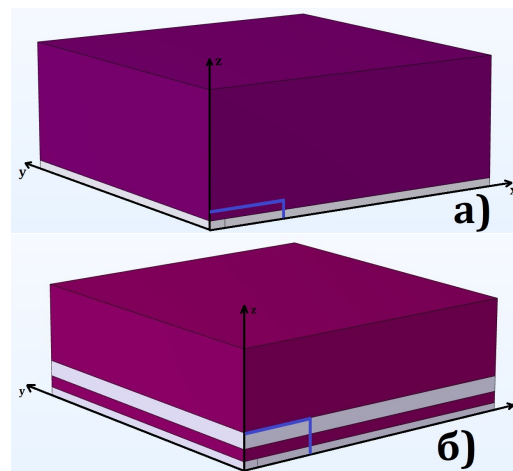


Рис. 1. Симметричная часть расчетной области задачи для случая с одним (а) и несколькими (б) коллекторами

ньютоновской слабосжимаемой жидкости в предположении выполнения закона Дарси [1].

В качестве граничных условий приняты: на ближних к трещине границах (плоскости  $z = 0$ ;  $x = 0$ ) заданы условия симметрии. На границе, содержащей предварительно закрепленную трещину, заполненную проппантом, и в области потенциального распространения трещины задано условие на перемещения в виде  $v \geq v_0(x, z)$ . Трещина раскрывается под действием давления в ней. Задача фильтрации на данной границе сопрягается с законом сохранения массы в приближении теории смазки [2]. На дальних границах задано постоянное поровое давление  $p = p_0$  и начальные полные нормальные напряжения, причем горизонтальные напряжения в коллекторе отличаются от горизонтальных напряжений в покрышке на величину  $\Delta\sigma_h = \sigma_{hcap} - \sigma_{hcol}$  из-за разницы коэффициентов Пуассона  $\nu$  материалов. Закачка флюида (воды) осуществляется через точечный источник, расположенный в точке  $(0, 0, 0)$ . Предложенная модель основана на модели из работы [2].

Серия расчетов с двумя толстыми покрышками и одним коллектором проводится для различ-

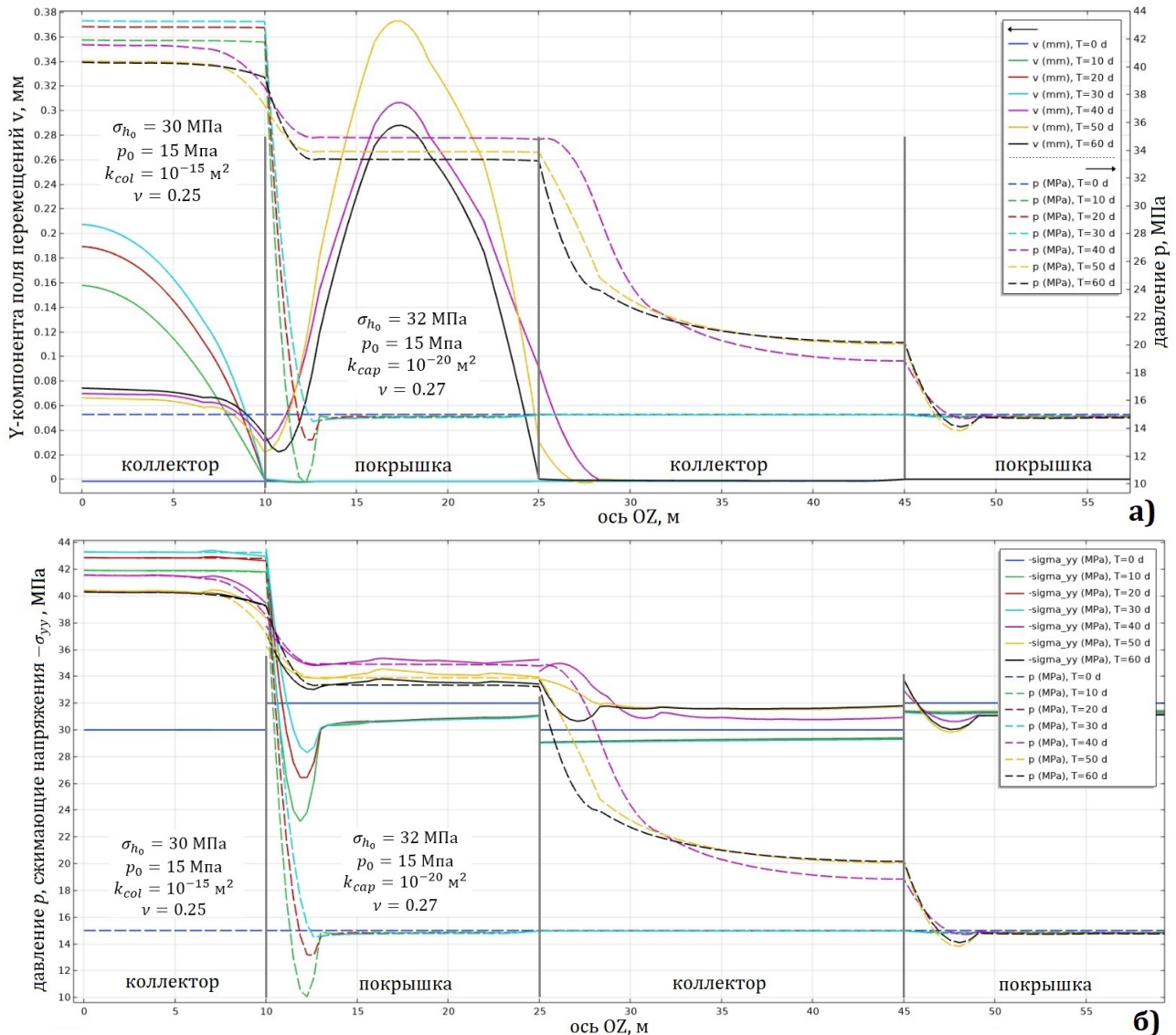


Рис. 2. Распределение  $v, p$  (а),  $-\sigma_{yy}, p$  (б) вдоль оси  $OZ$

ных значений  $\Delta\sigma_h$  и проницаемости покрывшек, а также с учетом и без учета пороупругости. В серии расчетов с тремя коллекторами и четырьмя покрывшками варьируются проницаемости коллекторов, отделенных от центрального коллектора тонкими покрывшками для оценки условия прорыва покрывшки и оценки величины перетока флюида между пластами.

Все уравнения решаются численно методом конечных элементов в пакете COMSOL Multiphysics. Перед проведением расчетов, описанных выше, была проведена верификация расчетной модели путем сравнения с известными решениями для радиальной трещины [3], распространяющейся в однородной упругой среде в  $M$ - и  $\bar{M}$ -режимах, на сгущающейся последовательности сеток. Сетка строится во внутреннем генераторе расчетных сеток COMSOL и состоит из тетраэдрических и треуголь-

ных элементов.

В результате расчетов получены распределения порового давления  $p$ , полных напряжений  $\sigma_{yy}$ , полуоткрытия  $v$ , которые представлены на Рис. 2 для случая с несколькими коллекторами. Установлено, что прорыв происходит при величине давления в трещине гидроразрыва, существенно превышающего начальное минимальное сжимающее напряжение в покрывшке  $\sigma_{hcap}$ . Данный факт объясняется увеличением сжимающих напряжений в окрестности трещины гидроразрыва в коллекторе вследствие повышения порового давления. Полученные результаты свидетельствуют о скачкообразном характере явления прорыва трещины авто-ГРП в покрывшку, который сопровождается «схлопыванием» выросшей в центральном коллекторе трещины авто-ГРП, лавинообразным ростом трещин в тонких покрывшках и интенсивной филь-

трацией флюида в соседние коллекторы. Отмечается, что образовавшаяся в результате прорыва в соседний коллектор трещина при постоянстве расхода закачки постепенно останавливает свой рост, и в итоге за конечное время рассматриваемая конфигурация переходит к псевдоустановившемуся режиму фильтрации. В этом режиме в покрывках и соседних коллекторах всегда остается часть раскрытой трещины. Объем трещины, оставшейся в соседнем коллекторе после фазы бурного роста, определяется отношением проницаемостей целевого и нецелевого пласта: чем больше проницаемость материала нецелевого пласта, тем меньше объем оставшейся в нем трещины. В центральном коллекторе после «схлопывания» постепенно восстанавливается трещина авто-ГРП, однако ее длина остается меньше, чем до прорыва.

Разработанная математическая модель также использована для исследования условий прорыва трещины при наличии начальной закрепленной

трещины ГРП с учетом вызванного этой трещиной преднапряженного деформированного состояния среды, с варьированием темпов закачки флюида в центральный коллектор.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSUS-2025-0016) и Передовой Инженерной Школы НГУ.*

#### Список литературы

- [1] Coussy, O. Poromechanics. / O.Coussy. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2004. – 315 p.
- [2] Baykin, A.N. Application of the Fully Coupled Planar 3D Poroelastic Hydraulic Fracturing Model to the Analysis of the Permeability Contrast Impact on Fracture Propagation / A.N. Baykin, S.V. Golovin // Rock Mech. Rock Eng. – 2018. – Vol. 51, № 10. – P. 3205–3217.
- [3] Dontsov, E. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity and leak-off / E. Dontsov // R. Soc. Open Sci. – 2016. – Vol. 3, № 12. – Art. 160737.

## О сходимости собственных элементов двумерной сингулярно возмущенной краевой задачи типа Стеклова для оператора Ламе

Давлетов Д.Б.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Пусть заданы конечные числа  $a < 0, b > 0$  и малый параметр  $0 < \varepsilon \ll 1$ . И пусть  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  – связная ограниченная область, содержащая начало координат с гладкой границей  $\partial\omega$ . Кроме того, введём обозначения следующих областей:

$$\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}, \quad x = (x_1, x_2), \quad \Omega = (-b, b),$$

$$\Pi = \Omega \times (a, +\infty), \quad \Omega_a = \Omega \times \{a\}, \quad \Pi_\varepsilon = \Pi \setminus \overline{\omega}_\varepsilon.$$

Через  $\Delta^*$  обозначим оператор Ламе:

$$\Delta^* := \Delta + \alpha \nabla \operatorname{div},$$

где  $\alpha = (\lambda + \mu) / \mu, \lambda, \mu > 0$  – постоянные Ламе (см., например, [1, формулы (4.1), (4.4), (5.5)], которые взаимосвязаны с упругими постоянными материала [2, гл. VIII, §1, формулы (8.4)] следующим образом:

$$A_{11} = A_{22} = \lambda + 2\mu, \quad A_{12} = \lambda, \quad A_{33} = \mu$$

при  $A_{13} = A_{23} = 0$  в случае равных постоянных Пуассона для изотропных тел [2, гл. VIII, §8].

Для произвольной достаточно гладкой вектор-функции  $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$  и внешней нормали  $n$  через  $\partial\phi / \partial n$  обозначим вектор-столбец с компонентами

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_1 &= \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}\right) \cos(\widehat{n; x_1}) + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}\right) \cos(\widehat{n; x_2}), \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_2 &= \mu \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}\right) \cos(\widehat{n; x_1}) + \\ &+ \left(\lambda \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}\right) \cos(\widehat{n; x_2}), \end{aligned}$$

который представляет собой результат действия векторного оператора напряжения [2, формулы (8.15), (8.16)] на вектор-функцию  $\phi(x)$  при  $A_{13} = A_{23} = 0$ .

Рассматривается следующая сингулярно возмущенная краевая задача Стеклова в полуполосе с малым отверстием:

$$\Delta^* \psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \Pi_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a,$$

$$\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial n} = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega_a. \quad (1)$$

Наряду с ней рассмотрим предельную краевую задачу в полуполосе без отверстия:

$$\Delta^* \psi_0 = 0, \quad x \in \Pi, \quad \psi_0 = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a,$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial n} = \lambda_0 \psi_0, \quad x \in \Omega_a. \quad (2)$$

Предполагается, что решения краевых задач (1), (2) обладают конечными интегралами Дирихле по областям  $\Pi_\varepsilon$  и  $\Pi$  соответственно.

В работе [3] доказано, что собственные значения предельной краевой задачи (2) существуют и имеют следующую общую структуру:

$$0 < \lambda_{0,1} \leq \lambda_{0,2} \leq \dots \leq \lambda_{0,k} \leq \dots,$$

где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы (см. работу [4]).

**Теорема 1.** Пусть отрезок  $[\lambda_-, \lambda_+]$  не содержит собственных значений предельной краевой задачи (2). Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  этот отрезок не содержит и собственных значений сингулярно возмущенной краевой задачи (1).

Пусть кратность собственного значения  $\lambda_0$  предельной краевой задачи (2) равна  $d$ . Тогда существует ровно  $d$  собственных значений  $\lambda_\varepsilon^{(l)}, l = \overline{1, d}$  (с учетом кратности) краевой задачи (1), сходящихся к  $\lambda_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Пусть  $R_\varepsilon : L_2(\Omega_a) \mapsto L_2(\Omega_a)$  – линейный оператор, ставящий в соответствие вектор-функции  $f_\varepsilon \in L_2(\Omega_a)$  сужение решения  $u_\varepsilon$  краевой задачи

$$\Delta^* u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Pi_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a,$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad x \in \Omega_a, \quad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\omega_\varepsilon$$

на  $\Omega_a$ , а  $R_0 : L_2(\Omega_a) \mapsto L_2(\Omega_a)$  – линейный оператор, ставящий в соответствие вектор-функции  $f \in L_2(\Omega_a)$  сужение решения  $u_0$  краевой задачи

$$\Delta^* u_0 = 0, \quad x \in \Pi, \quad u_0 = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + u_0 = f, \quad x \in \Omega_a$$

на  $\Omega_a$ :

$$R_0 \mathbf{f} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{f}, \Phi_k)_{L_2(\Omega)}}{\mu_k + 1} \Phi_k(x_1).$$

Тогда для соответствующих собственных проекторов  $\mathcal{R}_\varepsilon := R_\varepsilon^{-1}$  и  $\mathcal{R}_0 := R_0^{-1}$  в  $L_2(\Omega_a)$  имеет место сходимость  $\mathcal{R}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{R}_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Список литературы**

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика (в 10 т.). Том 7: Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 264 с.

[2] Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.

[3] Давлетов Д.Б., Давлетов О.Б., Давлетова Р.Р., Ершов А.А. О собственных элементах двумерной краевой задачи типа Стеклова для оператора Ламэ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 54–65.

[4] Давлетов Д.Б., Давлетов О.Б., Давлетова Р.Р., Ершов А.А. Сходимость собственных элементов краевой задачи типа Стеклова для оператора Ламэ // Труды Института математики и механики УРО РАН. 2021. Т. 27. № 1. С. 37–47.

## Нелинейные уравнения диффузии и их применение в задачах материаловедения

Демин В.А.<sup>а</sup>, Демина Т.В.<sup>а,б</sup>, Игошев С.А.<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

<sup>б</sup>Пермский федеральный исследовательский центр, ИМСС УрО РАН, Пермь

Диффузионные явления чрезвычайно многогранны и с ними приходится постоянно сталкиваться в самых разнообразных областях науки и природных процессах. В настоящее время понятно, что большое число этих явлений не могут быть объяснены уравнением классической (линейной) диффузии. Зачастую корректный вид результирующего уравнения определяется из законов статистической физики и требует использования специальной математики, а именно, применения методологии дробных производных. Именно так полноценно описываются некоторые явления супер- или субдиффузии.

Тем не менее, некоторые процессы могут быть объяснены и количественно описаны, исходя из феноменологических закономерностей через обобщение закона Фика. В частности, именно в этом ключе уже долгое время моделируются процессы протонирования кристалла ниобата лития при создании канальных волноводов в ходе реализации технологии по производству интегральных фотонных схем [1,2]. В этих работах показано, что только учет нелинейностей позволяет теоретически построить профиль концентрации протонированной области адекватный экспериментальным данным.

Другим направлением по применению уравнений нелинейной диффузии является производство разных видов композиционных материалов. В виду сложности и многогранности проблематики, можно констатировать факт, согласно которому создание новых композиционных материалов до сих пор осуществляется чаще всего экспериментально, методом проб и ошибок. Теоретические модели, имеющие какую-то предсказательную ценность, крайне редки в материаловедении.

Так, при производстве керамических композиционных материалов на основе углеродного волокна и при использовании в качестве связующего наполнителя кремниевую матрицу приме-

няются жидкофазный [3] или парофазный методы силицирования, а также их различные модификации [4]. До настоящего времени для обеих технологий и, тем более для их комбинаций, нет работающих цифровых двойников, в результате чего они совершенствуются опытным путем.

Чтобы не усложнять описание транспортных процессов в среде, и в то же время не потерять адекватность физико-математических представлений о явлении, упрощение применяемой методики численного моделирования зачастую приводит к уравнению нелинейной диффузии, той или иной степени сложности. Одним из примеров успешного осуществления этой стратегии является полученное в [5] уравнение нелинейной диффузии, предназначенное для описания переноса паров кремния в реторте в условиях среднего вакуума в ходе реализации процесса парофазного силицирования углеродного волокна.

Оказалось, что несмотря на гигантское значение коэффициента диффузии при таких высоких температурах и крайней степени разреженности среды для моделирования переноса паров кремния от тиглей с расплавом к изделию помимо диффузионного требуется учет конвективного механизма переноса, что приводит к специфическому нелинейному уравнению диффузии. В [5] было показано, что предлагаемое уравнение (в отличие от классического уравнения диффузии) дает в ходе расчетов адекватное распределение концентрации паров кремния в реторте и предсказывает согласующееся с экспериментом время силицирования.

*Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 26-93-20023).*

### Список литературы

- [1] Demin V.A., Petukhov M.I., Sosunov A.V., Volynsev A.B. On the nature of transport phenomena during proton exchange technological process // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. Thematic issue "Ferroelectric, Multiferroic and Magnetic"

- Materials, Micro- and Nano-Domain Engineering, Ceramics and Thin Films". 2025. Vol. 89, Suppl. 3, pp. S358-S363. DOI: 10.1134/S1062873825714643.
- [2] Sosunov A.V., Demin V.A., Miasnikova E.V., Masalkin D.N., Kornilicyn A.R., Kuneva M.K., Akhmatkhanov A.R., and Shur V.Ya. Proton-Exchange Waveguides in Lithium Niobate: State of the Art and Applications // *Phys. Status Solidi A. Review*, 2025, 15 p. doi: e202500535.
- [3] Shikunov S., Kaledin A., Shikunova I., Straumal B., Kurlov V. Novel method for deposition of gas-tight SiC coatings // *Coatings* 13 (2023) 354; DOI: 10.3390/coatings13020354..
- [4] Бушуев В.М. Разработка комбинированного метода силицирования крупногабаритных изделий из УУКМ, базирующегося на альтернативном жидкофазном методе и применении процесса капиллярной конденсации паров кремния / В.М. Бушуев, С.Г. Лунегов, М.В. Бушуев // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника*, 2015, № 40. С. 44-63. DOI 10.15593/2224-9982/2015.40.03..
- [5] Демин В.А., Демина Т.В. Трехмерное численное моделирование процесса переноса паров кремния в ходе насыщения пористой углеродной матрицы // *Теплофизика высоких температур*, 2024, Т. 62, № 6, с. 874-883. DOI: 10.31857/S0040364424060102.

## Математическая модель движения полидисперсных потоков в многоступенчатых сопловых сепараторах

Еникеев И.Х.

Московский политехнический университет, Москва

Работа посвящена расчету методом крупных частиц полидисперсных смесей в двухступенчатых сопловых воздухоочистителях. Исследована газодинамическая структура потока для различных размеров частиц взвешенной фазы. Особое внимание уделено режимам с большим массовым содержанием дисперсной фазы во входном сечении сопла первой ступени. В статье движение газодисперсных потоков рассмотрено на основе взаимопроникающих континуумов [1]. Математическая модель движения газа и частиц в рамках этого подхода, а также схема расчета приведены в работах [2,3]. Рассмотрена четырёхфазная среда, состоящая из несущего сжимаемого газа и монодисперсных твёрдых частиц в сепараторе с радиусом входного сечения  $R$ , моделирующим работу двухступенчатого воздухоочистителя, принципиальная схема работы которого приведена на рис. 1.

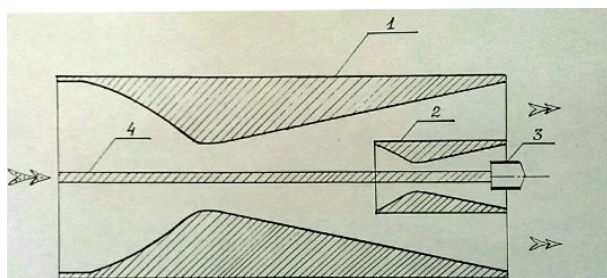


Рис.1. Схема работы двухступенчатого соплового воздухоочистителя с центральным отводом пыли. 1 – корпус первой ступени, 2 – корпус 2 – ой ступени, 3 – пылеприемник 4 – осевая перегородка

В качестве 1-ой фазы будем рассматривать несущий газ, 2-ой фазы – фракцию падающих частиц, т.е. частиц, летящих к боковой поверхности канала, 3-ей фазы – фракцию частиц, отскочивших от боковой поверхности канала и 4-ой фазы – фракцию частиц, отскочивших от внутренней стенки канала, расположенной вдоль оси симметрии канала.

Результаты расчетов, показали, что начиная с  $m_{20} = 0.2$ , где  $m_{20}$  – концентрация дисперсной

фазы во входном сечении сопла первой ступени, диаметр частиц взвешенной фазы существенно влияет, как на структуру газового потока, так и на движение частиц различных фракций. Так, например, с уменьшением  $d$ , где  $d$  диаметр частиц 2-ой фазы (частиц, попадающих в сепаратор вместе с газом) частицы, отскочившие от боковой стенки сопла более интенсивно сносятся в сторону выходного сечения воздухоочистителя, тем самым уменьшая область, в которой расположены частицы, отражённые от поверхности, расположенной вблизи оси симметрии, как сопла первой, так и сопла второй ступени. Также выявлено, что частицы с диаметром, превышающем 100 мкм, отскакивают от боковой стенки сопла первой ступени, долетают до осевой перегородки сепаратора, отражаются от нее и летят в сторону кольцевого зазора между выходным сечением сопла первой ступени и входным сечением сопла второй ступени сепаратора.

Выводы. На основе теории взаимопроникающих континуумов создана математическая модель и метод расчета, позволяющие учитывать влияние различных безразмерных определяющих параметров на характеристики газодисперсных потоков в областях сложной формы, в частности в областях, моделирующих форму сопловых сепараторов. Выявлено, что при движении полидисперсных газозвесей в проточной части сопла первой ступени воздухоочистителей, существуют фракции частиц, которые после соударений о твердые стенки сепаратора не попадают во вторую ступень, а вылетают в атмосферу, что существенно снижает эффективность работы сепаратора. Также выявлено, что при больших содержаниях дисперсной фазы во входном сечении сопла первой ступени сепаратора, частицы, отскочившие от твердых поверхностей существенно изменяют линии тока газа и частиц. В этом случае происходит значительная деформация линий уровня газовой фазы и их смещение в сторону выходного сечения сопла первой ступени.

**Список литературы**

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 1. Москва, Изд-во "Наука", 1987. 430с.
- [2] Еникеев И.Х. Математическое моделирование газопылевых течений в сепараторах соплового типа//Теплофизика и аэромеханика. 2020.Т.27.№1.С.99-101.
- [3] Enikeev I.K. Mathematical simulation of gas-dust flow in a nozzle-tipe separator//Thermophysics and Aeromechanics.2020.T.27.

## Влияние всесторонней изотермической ковки на структуру и коррозионное поведение сплава 1570С

Загитов Р.Р., Ситдииков О.Ш., Автократорова Е.В., Маркушев М.В.

Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г.Уфа

Исследовали структурное и коррозионное поведение промышленного алюминиевого сплава 1570С (Al - 5,0Mg - 0,18Mn - 0,2Sc - 0,08Zr - 0,01Fe - 0,01Si, вес. %) с различной дисперсностью вторичных выделений алюминидов переходных металлов. Для этого слиток подвергали одноэтапному (360°C, 6 ч) и двухэтапному (360°C, 6ч + 520°C, 1ч) гомогенизационному отжигу [1]. Последующую деформацию реализовали одно- и двухступенчатой всесторонней изотермической ковкой (ВИК). Первую ступень выполняли при 325°C до степени деформации  $\epsilon=12$  (ВИК 1), вторую – с понижением температуры в интервале 250-175°C с суммарной степенью  $\epsilon=24$  (ВИК 2). Деформация на каждой ступени включала несколько циклов осадки-вытяжки с ротацией оси приложения нагрузки. После каждого цикла ВИК заготовки охлаждали на воздухе.

Микроструктуру, химический и фазовый состав сплава изучали с помощью растрового электронного микроскопа. Угловые параметры структуры и размер кристаллитов определяли методом EBSD анализа. Тонкую структуру сплава анализировали с помощью просвечивающей электронной микроскопии. Сопротивление коррозии сплава оценивали методом потенциодинамической поляризации в растворе

3,5% NaCl + 1% HCl с определением плотности тока коррозии по Тафельской экстраполяции.

Установлено, что после одноэтапного отжига структура слитка состояла из равноосных зерен размером 25 мкм с долей высокоугловых границ (ВУГ) 0,90, внутри которых содержались выделения (дисперсоиды) фазы  $Al_3(Sc,Zr)$  размером 5-10 нм с плотностью пространственного распределения  $1 \times 10^4$  мкм<sup>-3</sup>. После двухэтапного отжига размер зерен увеличился до 27 мкм, доля высокоугловых границ не изменилась, дисперсоиды укрупнились до 20 нм, и их плотность снизилась в два раза (Табл.).

При ВИК при 325°C в обоих состояниях сплава формировалась схожая (суб)зеренная структура с размером кристаллитов около 2,5 мкм и долей ВУГ 0,85. После двухэтапной ВИК структура была более дисперсной: в состоянии после одноэтапной гомогенизации размер кристаллитов составил 1,0 мкм при доле ВУГ 0,79, а после двухэтапной – 1,5 мкм и 0,63 соответственно. Такой результат обусловлен тем, что более крупные дисперсоиды меньшей плотности оказывали меньший эффект на формирование новых ВУГ в процессе деформации.

Судя по данным в таблице, влияние ВИК на коррозионную стойкость определялось

Таблица. Параметры структуры и коррозионной стойкости сплава 1570С

Состояние	Размер кристаллитов, мкм	Разориентировка границ кристаллитов, град.	Доля ВУГ	Плотность тока коррозии, мкА/см <sup>2</sup>
Слиток	25 / 27*	40 / 41	0,90 / 0,92	13,9 / -
ВИК 1	2,4 / 2,5	36 / 37	0,85 / 0,87	10,0 / 15,3
ВИК 2	1,0 / 1,5	34 / 27	0,79 / 0,63	21,7 / 10,9

\*- одноэтапный / двухэтапный отжиг

температурой деформации (выше или ниже температуры сольвуса  $\beta$ -фазы ( $\text{Al}_3\text{Mg}_2$ ) ( $T_c = 250\text{--}270^\circ\text{C}$ ), а также размером и плотностью распределения дисперсоидов. Так послековки при температуре выше сольвуса, при практически одинаковом размере зерна обоих исследуемых структурных состояний, коррозионное поведение сплава в основном контролировали дисперсоиды. При этом более дисперсные частицы, наряду с измельчением зерен, обеспечили снижение плотности тока коррозии (фактически скорость протекания коррозии) почти на треть. В состоянии с более крупными выделениями после ВИК, напротив, плотность тока коррозии повышалась.

При ковке же, завершавшейся ниже температуры сольвуса, деформация стимулировала распад алюминиевого твердого раствора с выделением  $\beta$ -фазы. В этом случае коррозионная стойкость определялась количеством (плотностью) деформационно-индуцированных мало- и высокоугловых границ, которые служили местами преимущественного расположения выделений  $\beta$ -фазы. После одноэтапного отжига слитка большая плотность мелких дисперсоидов более эффективно сдерживала подвижность дислокаций, способствуя формированию более дисперсной структуры матрицы с большим количеством границ зерен. Это создавало больше мест для выделения  $\beta$ -фазы, что приводило к росту плотности тока коррозии (Табл.). После же

двухэтапного отжига укрупненные дисперсоиды слабее препятствовали при ВИК деформационному разупрочнению, и способствовали большей аннигиляции дефектов и формированию более крупнозернистой структуры с меньшим количеством ВУГ. В результате количество мест для выделения  $\beta$ -фазы снижалось, соответственно, чему уменьшалась плотность тока коррозии.

Таким образом, коррозионная стойкость сплава 1570С после ВИК определялась соотношением температурыковки и температуры сольвуса  $\beta$ -фазы, а также размером и распределением дисперсоидов  $\text{Al}_3(\text{Sc},\text{Zr})$ , контролирующих формирование деформационно-индуцированных границ. Более эффективной с точки зрения улучшения его коррозионной стойкости является обработка, включающая одноэтапный отжиг слитка с последующей всесторонней изотермической ковкой при  $325^\circ\text{C}$ .

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в соответствии с государственным заданием ИПСМ РАН.

#### Список литературы

- [1] E.V. Avtokratova, O.Sh. Sitdikov, R.R. Zagitov, M.V. Markushev // Lett. Mater. 2022. № 12(4s). P. 388-393. <https://doi.org/10.22226/2410-3535-2022-4-388-393>.

## Обтекание препятствия потоком жидкости во внезапно расширяющейся трубе

Закиров А.Х.

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

Из экспериментальных и теоретических исследований известно, что при движении жидкости в диффузорах наблюдаются такие явления, как отрыв потока от поверхности, обратное течение и усиление турбулентности. Причем отрыв потока в диффузоре сильно зависит от его геометрии и параметров потока. Основной задачей при рассмотрении взаимодействия струи с различными твердыми преградами является определение силы давления струи на эти преграды. Актуальной является проблема дальнейшего совершенствования различных методов и алгоритмов исследования отрывных течений в областях со сложными конфигурациями. Целью исследования является изучение взаимодействия струи, вытекающей из узкой части трубы с твердой стенкой конической формы и осью, совпадающей с осью трубы.

Рассматривается задача об обтекании клина потоком идеальной несжимаемой жидкости в трубе с внезапным расширением. Представлен метод расчета параметров струйных течений в двумерной постановке, очень удобный для решения практических задач. На примере стационарной задачи обтекания клина дозвуковым потоком жидкости в трубе проведено теоретическое исследование с целью изучить взаимодействие струи, вытекающей из узкой части трубы с твердой стенкой конической формы. С использованием методов теории струй получено аналитическое решение поставленной задачи [1-3]. Определено распределение скоростей и давлений на каждом отрезке границы параметрической полуплоскости.

Предполагается, что течение установившееся, вихри и внешние силы отсутствуют. На твердых границах внутри канала граничное условие:  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ .

Решение данной задачи строится в параметрической форме, причем в качестве канонической области взят верхняя полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$ . Область, занятую движущейся жидкости, отобразим на область параметрического переменного ( $\zeta$ ). Для определения потока находим функцию скоростей  $\bar{V}(\zeta)$ . Согласно методу особых точек Чаплыгина конформное отображение верхней полуплоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  на полосу осуществляется функцией [2]:

$$W(\zeta) = -\frac{q}{\pi} \ln(\zeta - 1) + i\frac{q}{\pi}.$$

Введем в рассмотрение функцию Н.Е. Жуковского [4]

$$\omega = \ln\left(\frac{V_0 dz}{dW}\right) = \ln\left(\frac{V_0}{V}\right) + i\theta,$$

где  $\theta$  — угол скорости с осью абсцисс  $x$ ,  $V_0$  - скорость на свободной поверхности.

Находим функцию Н.Е. Жуковского:

$$\omega(\zeta) = \ln\left[\frac{\sqrt{b}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{b+1}}{\sqrt{b+\zeta}}\right]^{2\alpha} \frac{\sqrt{\zeta-k}(\sqrt{e}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{e-1})}{\sqrt{\zeta-e}(\sqrt{k}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{k-1})}.$$

Из последнего выражения можно найти сопряженную комплексную скорость и давлений на соответствующих границах верхней полуплоскости.

Конформно отображающую функцию  $z = z(\zeta)$  находим из уравнения

$$dz = \frac{dW}{d\zeta} \left(\frac{dW}{dz}\right)^{-1} d\zeta.$$

Для нахождения уравнения свободной поверхности в параметрической форме достаточно проинтегрировать последние выражения. Проводились расчеты для основных гидродинамических параметров течения и определены формы свободной поверхности струи. Результаты аналитического исследования обтекания клина идеальной жидкости показали, что рассматриваемую модель можно использовать для расчета гидродинамических параметров течения при струйном обтекании конических тел.

### Список литературы

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- [2] Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. - М.: Наука,
- [3] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. - М.: Наука, 1987.
- [4] Zakirov A.Kh. Outflow of compressible fluid from a cylindrical nozzle. IP Conf. Proc. 3119, 030006 (2024) <https://doi.org/10.1063/5.0215025>.

## Определение оптимальной схемы объединения компонент углеводородной смеси методами метаэвристического поиска

Имомназаров Б.Х.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Уравнения состояния (EOS) являются основным инструментом описания термодинамического поведения многокомпонентных пластовых флюидов. Детальная EOS-модель, построенная по данным лабораторного анализа, может содержать до 80 компонентов [1]. Однако в задачах гидродинамического моделирования вычислительная сложность возрастает как  $O(N^2)$ – $O(N^3)$ , где  $N$  — число компонентов в составе флюида. Это приводит к неприемлемому времени расчёта модели и для сокращения вычислительных затрат применяется процедура сжатия модели, то есть объединения компонентов в псевдокомпоненты с усреднёнными термодинамическими свойствами [2]. Ключевое требование к сжатой модели — воспроизведение PVT-свойств полного (детализированного) состава с допустимым уровнем погрешности.

Выбор оптимальной схемы объединения компонентов представляет собой задачу комбинаторной оптимизации. Если  $N$  — число компонентов в полном составе, а  $N_x$  — число псевдокомпонентов в сжатой модели, то число допустимых вариантов группировки определяется биномиальным коэффициентом  $C(N-1, N_x-1)$ . Например, для 34-компонентной системы при сокращении до 9 псевдокомпонентов число возможных комбинаций составляет около 14 миллионов, что исключает использование полного перебора. В существующих работах [3, 4] в качестве критерия, на основе которого выбирается оптимальная схема объединения, используются такие PVT-эксперименты, как SSE и сепараторные тесты. Эти эксперименты проводятся при определенных термобарических условиях и не гарантируют корректность сжатой модели во всем интервале изменения

температур и давлений, характерных для процессов добычи и подготовки углеводородов.

В данной работе поиск оптимальной схемы объединения компонентов проводится с использованием комбинированного критерия качества на основе эксперимента CVD и фазовой диаграммы, поскольку фазовая диаграмма является интегральной характеристикой фазового поведения системы в широком диапазоне термобарических условий. Кроме того, дополнительно предусмотрена возможность включения критериев близости экспериментов SSE и давления насыщения.

Оптимальную схему объединения предлагается определять положением разделителей в списке компонент, упорядоченных по молекулярной массе. Размерность бинарного вектора разделителей на единицу меньше, чем число компонент в детализированном составе. При этом, единица в позиции вектора означает, что между соответствующими компонентами проходит граница и они принадлежат разным псевдокомпонентам; ноль — что компоненты объединяются в одну группу. Общее число отдельных групп компонент соответствует числу псевдокомпонент в сжатом составе. Для получения  $N_x$  псевдокомпонентов необходимо расставить ровно  $N_x-1$  единицу в векторе разделителей. Такой подход позволяет свести задачу определения оптимальной схемы объединения к задаче оптимизации с бинарными переменными.

В работе задача оптимизации решается с использованием таких популярных методов, как генетический алгоритм (GA), бинарный метод роя частиц (BinPSO) [5] и бинарная дифференциальная эволюция (BinDE) [6] с последующим уточнением найденного решения методом табу-поиска [7]. Для адаптации каждого оптимизационного алгоритма к задаче с

фиксированным числом единиц были разработаны специализированные операторы, сохраняющие ровно  $N_x - 1$  единицу на каждом этапе своей работы.

Метод реализован на языке Python с применением симулятора термодинамических расчётов PhaseSim v1.0 [8]. Предложенный подход был протестирован на модели 34-компонентного состава из работы [3] с сокращением числа компонент до 6, 9 и 15 псевдокомпонентов.

Полученные оптимальные схемы объединения были сопоставлены с правилами группировки из работы [4]. Отметим, что сжатые составы по обеим схемам объединения хорошо воспроизводят результаты моделирования CVD эксперимента по сравнению с полным составом. В качестве иллюстрации на Рис. 1 приведены кривые выпадения конденсата для полной и сжатых моделей с 6 псевдокомпонентами.

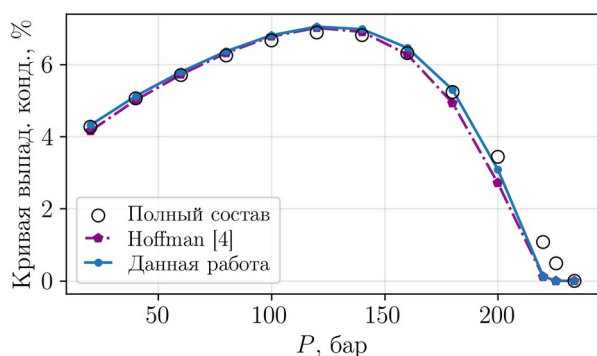


Рис. 1. Кривая выпадения конденсата по результатам моделирования CVD-эксперимента

Однако фазовая диаграмма сокращенных моделей с 9 и 6 псевдокомпонентами по схемам работы [4] имеет существенные погрешности. На Рис. 2 приведено сравнение фазовых диаграмм для сжатых моделей с 6 псевдокомпонентами по [4] и полученными в данной работе.

Таким образом, предложенный подход снижает ошибку воспроизведения фазовой диаграммы и значительно повышает точность PVT-свойств сжатой модели пластового флюида по сравнению с существующими методами.

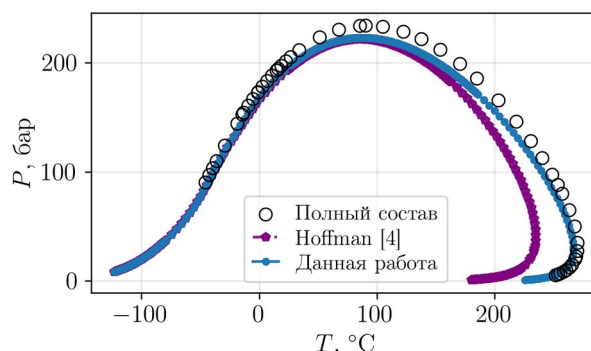


Рис. 2. Фазовая диаграмма

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSUS-2025-0016), а также при поддержке Передовой инженерной школы НГУ и Научно-образовательного центра «Газпромнефть-НГУ».*

### Список литературы

- [1] Whitson C.H., Brulé M.R. Phase Behavior. SPE Monograph Series, Vol. 20. 2000.
- [2] Coats K.H. Simulation of gas condensate reservoir performance // Journal of Petroleum Technology. 1985. Vol. 37, No. 10. P. 1870–1886.
- [3] Alavian S.A., Whitson C.H., Martinsen S. Global component lumping for EOS calculations // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Amsterdam, 2014. SPE-170912-MS.
- [4] Hoffmann A. EOS lumping optimization using a genetic algorithm and a tabu search // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2019. Vol. 174. P. 495–513.
- [5] Kennedy J., Eberhart R.C. A discrete binary version of the particle swarm algorithm // Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics. 1997. Vol. 5. P. 4104–4108.
- [6] Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // Journal of Global Optimization. 1997. Vol. 11, No. 4. P. 341–359.
- [7] Glover F. Tabu search – Part I // ORSA Journal on Computing. 1989. Vol. 1. P. 190–206.
- [8] PhaseSim v1.0 – расчёт фазового состава и свойств газожидкостной смеси: свид. о гос. рег. программы для ЭВМ № 2023685173 Российская Федерация. / И.В. Васюкова, Ю.И. Кузнецова, Я.Е. Нагорнева [и др.]; правообладатель Новосибирский государственный университет (НГУ). – № 2023680896; заявл. 12.10.2023; зарег. 23.11.2023; опубл. 23.11.2023, Бюл. № 12.

## Математическое моделирование динамики терминального отдела грудного лимфатического протока

Ишмухаметов К.И.\*, Ганцев Ш.Х.\*, Урманчиев С.Ф.\*\*

\* Центр цифровой онкологии Азиатской академии наук, Гонконг

\*\* Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Терминальный отдел грудного лимфатического протока – одна из важнейших анатомических структур человека, впадающая в левый венозный угол через лимфовенозное соустье (ЛВС) и обеспечивающая транспорт лимфы в кровеносную систему. Через систему грудного лимфатического протока проходит до 80% всей лимфы человека. Обеспечение подобной работы обуславливает наличие аппарата лимфовенозного соустья: развитого сфинктера, клапана и других анатомических особенностей [1].

Диаметр терминального отдела грудного лимфатического протока в среднем составляет около 2,5 мм. Кроме основного ствола грудного лимфатического протока, в вену впадают и дополнительные ветви, которые выявляются у 20% людей (от 1 до 7 ответвлений) [2].

Стенка грудного лимфатического протока состоит из трех слоев: интимы, меди и адвентиции. Интима представлена эндотелием. На расстоянии до 10 мм от ЛВС располагается клапан, который является дубликатурой внутренней оболочки. Средний слой содержит гладкомышечные волокна, которые в месте впадения в вену образуют сфинктер. Волокна расположены преимущественно в продольном и циркулярном направлениях. Гладкомышечные клетки участвуют в сокращении протока, а также могут присутствовать в основании створок клапана, участвуя в его работе. Адвентиция представлена преимущественно коллагеновыми и другими волокнами. Толщина стенки грудного лимфатического протока составляет около 0,45 мм [1,2,3].

Особенность функционирования аппарата ЛВС состоит в том, что среднее давление в грудном лимфатическом протоке составляет около 156,9 Па [4], в то время как нормальное давление в подключичной вене равно ~980,7 Па. Таким образом, мы имеем дело с отрицательным перепадом давления и для его преодоления необходимо активное непрерывное сокращение мышечных волокон сфинктера ЛВС, которые создают дополнительное давление, позволяющее вытеснить лимфу, находящуюся в камере аппарата ЛВС в поток венозной крови.

Нарушение работы аппарата ЛВС предположительно играет значимую роль в патогенезе лимфovenозной недостаточности, что проявляется лимфедемой, а также определяет снижение эффективности функционирования иммунной системы.

Целью настоящего исследования является определение причин отклонений в динамике сокращений ЛВС методами математического моделирования для установления возможных патологий.

Терминальный отдел грудного лимфатического протока в настоящей работе представлен в виде полого толстостенного цилиндра (рис. 1). Течение жидкости внутри полого цилиндра происходит при осесимметричном сжатии стенок оболочки в результате сокращения циркулярных мышечных волокон. Закономерности течения описываются уравнением Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости [5]. В первом приближении влияние сокращения продольных волокон не учитывается.

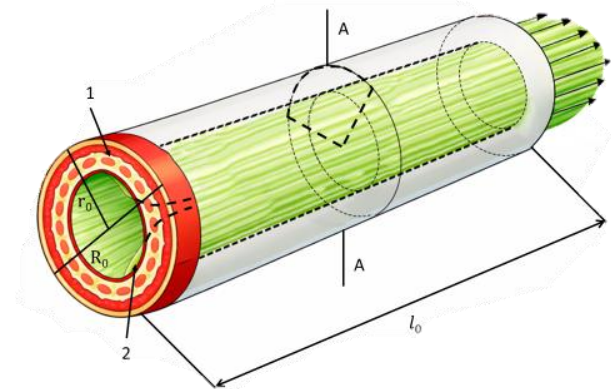


Рис.1. Схема терминального отдела грудного лимфатического протока, где  $r_0$  – текущий внутренний радиус цилиндра;  $R_0$  – текущий внешний радиус цилиндра;  $l_0$  – длина текущего участка цилиндра; AA – сечение; 1 – мышечная ткань сфинктера; 2 – клапан.

Предположим, что циркулярные мышечные волокна в начальный момент времени расположены на расстоянии  $R_0$  от оси цилиндра, что приведёт к постановке соответствующего граничного условия. Осесимметричное сжатие толстостенного цилиндра может быть описано неоднородным бигармоническим уравнением Эйри [6]:

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = -(1-\nu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 f_r}{\partial r^2} \right),$$

где:  $f_r = -\rho \frac{\partial u_r}{\partial t^2}$ ,  $u_r$  – радиальное перемещение, а  $\chi$  – функция напряжений.

По аналогии с процедурой решения классической задачи Ламе, получим новые выражения для радиальных и тангенциальных статических напряжений в цилиндре, возникающих при действии внутреннего давления  $p_i$  и сжимающих тангенциальных напряжений  $T_e$  (рис. 2):

$$\sigma_r = -\frac{T_e R_0^2 + p_i r_0^2}{R_0^2 + r_0^2} + \frac{(T_e - p_i) r_0^2 R_0^2}{R_0^2 + r_0^2} \cdot \frac{1}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = -\frac{T_e R_0^2 + p_i r_0^2}{R_0^2 + r_0^2} - \frac{(T_e - p_i) r_0^2 R_0^2}{R_0^2 + r_0^2} \cdot \frac{1}{r^2},$$

Следует отметить, что в данном решении внутренних и внешний радиусы цилиндра являются функциями времени, что позволило использовать текущее значение внутреннего радиуса в качестве граничного условия для гидродинамической части задачи, описывающей течение жидкости в цилиндрическом канале.

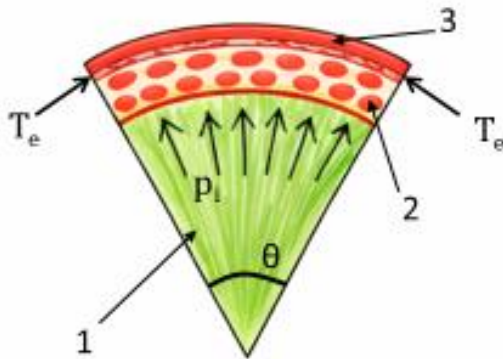


Рис. 1. Сечение АА цилиндра, где  $p_i$  – внутреннее давление;  $T_e$  – сжимающие тангенциальные напряжения; 1 – лимфа; 2 – продольные гладкомышечные волокна; 3 – циркулярные гладкомышечные волокна

Принимая во внимание, что радиальная скорость жидкости равна радиальной скорости внутренней границы цилиндра:

$$v_r = -\frac{dr(t)}{dt},$$

а из закона сохранения массы можно установить связь осреднённого значения продольной скорости от радиальной:

$$v_z = \frac{2z}{R} v_r.$$

Далее, для поставленной задачи можно привести оценку зависимости максимального давления в жидкости от радиуса внутренней поверхности цилиндра:

$$P_{\max} = \frac{2\mu v_r l^2}{r^3}.$$

Таким образом, при заданной радиальной скорости схождения цилиндра давление будет возрастать по закону обратной кубической зависимости.

В заключении следует отметить возрастающую роль математического моделирования как инструмента исследований в области биомеханики и медицинских наук. Создание цифровых двойников органов человека приведёт к возможности более детальных исследований влияния различных способов воздействия на живые системы для научного обоснования тех или иных методов лечения параллельно с традиционными методами [7]. В итоге, развитие цифровых технологий в медицине открывает новые возможности для диагностики, лечения и прогнозирования исхода различных заболеваний. Построение математической, а затем и цифровой, модели аппарата лимфопортального соустья будет способствовать более эффективному оказанию помощи пациентам с патологиями лимфатической системы и связанными с ними болезнями.

В дальнейшем полученные результаты станут основой для перехода на следующий этап построения многоуровневой виртуальной модели аппарата ЛВС. Сочетание различных физических и биологических аспектов при построении математической модели позволит создать цифровой двойник аппарата ЛВС и откроет возможности для дальнейших исследований в изучении анатомических структур в рамках подготовки студентов-медиков.

### Список литературы

- [1] Ганцев, Ш.Х. Сфинктер лимфопортального соустья: особенности структуры и функции / Ш. Х. Ганцев, Ш. Р. Кзыргалин, З. Х. Хусейнзода [и др.] // Здоровоохранение Таджикистана. – 2025. – № 4. – С. 11-19. – DOI 10.52888/0514-2515-2025-367-4-11-19. – EDN JAXFIM.
- [2] Лимфопортальное соустье и его клинко-анатомические особенности / Ганцев Ш. Х., Кзыргалин Ш. Р., Рустамханов Р. А. [и др.] // Медицинский вестник Башкортостана. – 2022. – №4. – с. 48-54.
- [3] Петренко В.М. Миоциты в створках клапанов грудного протока // Современные проблемы науки и образования. 2004. № 1.
- [4] Kelly B, Smith CL, Saravanan M, Dori Y, Hjortdal VE. Spontaneous contractions of the human thoracic duct-Important for securing lymphatic return during positive pressure ventilation? *Physiol Rep.* 2022 May;10(10):e15258. doi: 10.14814/phy2.15258. PMID: 35581742; PMCID: PMC9114659.
- [5] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- [6] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [7] Sun T, He X, Song X, Shu L, Li Z. The Digital Twin in Medicine: A Key to the Future of Healthcare? *Front Med (Lausanne).* 2022 Jul 14;9:907066. doi: 10.3389/fmed.2022.907066. PMID: 35911407; PMCID: PMC9330225

## Моделирование гидратообразования и диссоциации в естественных и техногенных морских течениях

Кильдибаева С.Р., Харисов Э.И.

Стерлитамакский филиал УУНиТ, Стерлитамак

В настоящей работе исследуются особенности миграции газовых пузырьков, процессов образования и диссоциации гидратов в условиях морских течений, имеющих как природное, так и техногенное происхождение.

Применительно к естественной миграции газовых пузырьков в океанической среде значимую роль играет понимание биогеохимического круговорота газов с целью ограничения их выбросов в атмосферу. Факт образования гидрата на поверхности мигрирующих пузырьков подтвержден лабораторными и полевыми экспериментами [1-3]. Образование гидратной оболочки на поверхности пузырьков оказывает влияние на скорость всплытия и интенсивность массообмена [4,5].

Высокую актуальность настоящее исследование сохраняет также для случаев техногенных утечек, сопровождающихся истечением нефти и сопутствующего газа на больших глубинах. При соответствии термобарических условий окружающей среды условиям стабильного существования гидрата на поверхности пузырьков начинают образовываться гидратные оболочки, что оказывает влияние на динамику совместной миграции углеводородов и одновременно создает дополнительные сложности при проведении работ по ликвидации утечки. Показательным примером служит разлив нефти в Мексиканском заливе в 2010 году, когда сопутствующий газ перешел в гидратное состояние, что воспрепятствовало ликвидации аварии: гидраты накапливались в железобетонном куполе, предназначенном для перекрытия утечки [6]. Для подобных случаев движение углеводородов включает три последовательных этапа: формирование затопленной струи, переход в плюмовую стадию и стадию адвекции-диффузии [7,8].

Существенный практический интерес также представляют технологии по добыче природного газа из газогидратных залежей, предусматривающие подъем гидратных частиц по

трубопроводу из зоны стабильного существования гидратов в область с более низкими давлениями и повышенными температурами [9]. В процессе подъема термобарические условия перестают соответствовать фазовому равновесию гидрата, что приводит к диссоциации. Интенсивность разложения газогидратных частиц при движении по трубопроводу определяет не только эффективность добычи, но и возможное вторичное образование гидратов и соответственно гидратных пробок.

В соответствии с постановкой задачи в настоящей работе рассматривается миграция газового пузырька от глубины, соответствующей термобарическим условиям стабильного существования гидрата, до водной поверхности. Таким образом, модель включает следующие этапы: образование гидратной оболочки на поверхности пузырька, миграцию гидратной частицы, когда пузырек полностью перешел в гидратное состояние, и диссоциацию пузырька.

Для описания процессов образования и разложения гидрата используются три схемы. Согласно первой схеме интенсивность гидратообразования лимитируется диффузией газа сквозь гидратную оболочку. Согласно второй схеме интенсивность гидратообразования лимитируется теплообменом с окружающей средой. Согласно третьей схеме скорость гидратообразования зависит от разности фугитивностей (летучестей) молекул газа на поверхности гидрата и при равновесных условиях.

Для каждой из указанных схем получены зависимости радиуса и скорости миграции пузырька от вертикальной координаты.

### Список литературы

- [1] Егоров А.В., Нигматулин Р.И., Рожков А.Н. Переход глубоководных метановых пузырей в твердые гидратные формы // Препринт ИПМех РАН. 2013. № 1038.
- [2] Rehder G. et al. Enhanced lifetime of methane bubble streams within the deep ocean. // Geophysical research letters. 2002. No. 29. P. 21.

- [3] Padilla A., Waite W. Laboratory Measurements of Rise Velocity for Individual, Hydrate-Free and Hydrate-Coated Gas Bubbles in Water // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. 2026. 27.
- [4] Jun I., Wang B., Gros J., Dissanayake A.L., Socolofsky S.A. Modeling the Dissolution and Transport of Bubbles Emitted From Hydrocarbon Seeps Within the Hydrate Stability Zone of the Oceans // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2025. 130. 10.1029/2024JC021942.
- [5] Русинов А.А., Александров Е.В. Математическая модель процесса всплытия одиночного пузырька газа в водной среде // *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*. 2017. № 2.
- [6] Fleegeer J.W., Riggio M.R., Mendelssohn I.A. et. al. Recovery of salt-marsh meiofauna six years after the Deepwater Horizon oil spill / *J. Exp. Mar. Biol. Ecol.* 2017. V. 502. P. 182–190.
- [7] Гималдинов И.К., Кильдибаева С.Р. Модель затопленной струи с учетом двух предельных схем гидратообразования // *Теплофизика и аэромеханика*. 2018. Т. 25. № 1. С. 79-88.
- [8] Кильдибаева С.Р., Харисов Э.И. Влияние состава компонент струйного течения на динамику распространения и гидратообразование для глубоководных разливов // *Инженерно-физический журнал*. 2024. Т. 97. № 5. С. 1275-1282.
- [9] Chen W., Xu H.-L., Kong W.-Y. et. al. Study on three-phase flow characteristics of natural gas hydrate pipeline transmission. *Ocean Engineering*. 2020. 214. 107727.

## Численный метод определения вибропрочностных характеристик выдвигаемых устройств подводных аппаратов

Коваль К.А.\* , Сухоруков А.Л.\*

\*АО «ЦКБ МТ «Рубин», Санкт-Петербург

Активное развитие подводной робототехники в последние десятилетия привело к появлению огромного количества различных действующих образцов и даже серий автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА), выполняющих сложные и опасные миссии без риска для жизни и здоровья человека. С их помощью могут решаться разнообразные задачи в рамках гражданского (гидрографические исследования, техническое обслуживание подводных коммуникаций) и военного (установка и обезвреживание мин, применение подводного оружия) направлений. Независимо от конкретной специализации аппарата для успешного выполнения миссии необходимо обеспечить позиционирование, навигацию, устойчивую связь, работу энергетической установки (в случае полупогружных аппаратов с двигателем внутреннего сгорания). Нормальное функционирование этих систем, как правило, осуществляется с помощью выдвигаемых устройств. В поднятом положении выдвигаемые устройства испытывают значительные гидродинамические и волновые нагрузки, что может сопровождаться возникновением вибраций и, как следствие, помех для работы систем аппарата, потерей скрытности, а также механическими повреждениями конструкции. Борьба с данными негативными последствиями является актуальной задачей, которая может быть решена на основе расчетного определения параметров вибрации и напряженно-деформируемого состояния выдвигаемых устройств. Анализ этой информации позволит предсказать возможность возникновения подобных ситуаций уже на ранних стадиях проектирования и разработать комплекс мероприятий для минимизации рисков выхода из строя оборудования и срыва выполнения миссий.

Существуют различные способы размещения оборудования (радиоантенны, антенны систем навигации, проблесковые маячки, вибраторные антенны радиоразведки и т.д.) на подводных аппаратах. Достаточно популярным способом является установка аппаратуры на верхнем вертикальном оперении. В качестве примера такого размещения оборудования можно привести АНПА «STDV» [1], «B-SEAL» [2], «Urashima» [3]. Такой способ требует наличия развитого вертикального оперения, что возможно при применении крестообразной или λ-образной схемы кормового оперения. Использование вертикального оперения для размещения оборудования позволяет упро-

стить конструкцию аппарата за счет отказа от приводов, обеспечивающих работу выдвигаемых устройств.

Достаточно часто применяются заваливающиеся мачты. Такая конструктивная схема используется для АНПА «Seahorse» [4], «Sea Stalker» [5], HSU-001 [6], а также многих других аппаратов. В подводном положении мачты при помощи приводов упираются в ниши, расположенные в корпусе подводного аппарата. На одном АНПА может располагаться от одной до нескольких заваливающихся мачт с оборудованием. Их форма, как правило, достаточно простая, однако размещение требует значительного пространства.

Другим видом выдвигаемых устройств являются телескопические мачты, которые используются на таких АНПА, как «AsterX» [7]. В разложенном положении в общем случае они представляют собой стержень переменного сечения с головной частью. Длина полностью разложенной мачты может быть сопоставима с длиной подводного аппарата. Мачта обеспечивает надежную работу систем навигации и связи в условиях морского волнения. В подводном положении мачта автоматически складывается и выполняет роль дополнительного вертикального стабилизатора. Такой вариант может применяться совместно с X-образным кормовым оперением. Недостатком подобного способа является конструктивная сложность реализации механизмов раскладывания мачты и их низкая надежность, что способствовало замене телескопической мачты на неподвижную для некоторых аппаратов, таких как «Eagle Ray» [8].

Большую популярность в последнее время приобретают полупогружные аппараты, оснащенные двигателями внутреннего сгорания в качестве энергетической установки (противоминный аппарат «Dorado» [9]). Они характеризуются значительной скоростью большой дальностью хода и автономностью. Работа двигателя под водой (РДП) обеспечивается с помощью шахты, расположенной внутри полой мачты, длина которой может быть близка к длине аппарата. Для снижения сопротивления мачта оснащается обтекателями из стеклопластика. На топе мачты также расположено оборудование для работы систем навигации и связи.

В целом можно отметить, что назначение, габариты, конфигурации и формы обтекателей выдвигаемых устройств подводных аппаратов весьма разнообразны. Их вибрации под воздействием гидродинамических и волновых нагрузок могут оказывать значи-

тельное влияния на работу оборудования АНПА, а в случае значительных габаритов выдвижных устройств – на динамику самого аппарата. Поэтому анализ вибропрочностных характеристик выдвижных устройств является важным этапом проектирования АНПА и основанием для принятия технических решений.

В работах [10, 11, 12] изложены основные подходы к определению напряженно-деформируемого состояния выдвижных устройств подводных объектов под действием нестационарных гидродинамических сил, вызванных периодическим срывом вихрей с поверхности обтекателя. Расчет гидродинамических характеристик обтекателей, основанный на численном интегрировании уравнений динамики вязкой жидкости, позволяет с достаточной степенью точности определять параметры нестационарного силового воздействия на конструкцию выдвижного устройства со стороны набегающего потока жидкости. Такой подход является достаточно универсальным и обеспечивает возможность определения нестационарных гидродинамических характеристик обтекателей различной формы. Помимо этого, может быть учтено взаимное влияние расположенных рядом выдвижных устройств на гидродинамические характеристики друг друга.

Также на основе численного решения уравнений изгибных колебаний выдвижных устройств определяются параметры напряженно-деформируемого состояния под действием внешней нагрузки со стороны потока жидкости. Разработанный численный метод был реализован в виде программного комплекса [13], позволяющего проводить инженерные расчеты, направленные на анализ вибропрочностных характеристик выдвижных устройств. На основе геометрических, массоинерционных и гидродинамических характеристик выдвижных устройств рассчитываются собственные формы и частоты колебаний конструкции, распределения максимальных значений перемещений, нормальных и касательных напряжений по длине выдвижного устройства, а также границы диапазона скоростей подводного объекта, при котором возможно возникновение резонансных явлений.

Валидация численных методов, используемых при вычислении параметров вибрации, была проведена на основе решения задачи о колебаниях упругого цилиндрического стержня при воздействии на него гидродинамической нагрузки [14]. Для этого была произведена декомпозиция общей гидроупругой задачи на гидродинамическую и динамическую части. Валидация гидродинамической части осуществлялась на основе сопоставления результатов численных расчетов и известных экспериментальных данных для обтекания кругового цилиндра большого удлинения. Хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных позволяет сделать вывод о достоверности методов, применяемых для решения гидродинамической части задачи. Для оценки адекватности разработанного метода определения вибрационных характеристик результаты расчетов сравнивались с данными, полу-

ченными с помощью современных мультифизических пакетов общего назначения (ANSYS MECHANICAL) на основе метода конечных элементов (МКЭ). К созданной трехмерной конечно-элементной модели исследуемого цилиндрического стержня была приложена нестационарная гидродинамическая нагрузка, вычисленная при расчете гидродинамической части задачи. Хорошее согласование результатов расчетов, основанных на МКЭ и полученных с помощью разработанного численного метода, подтверждает достоверность решения динамической части задачи.

Достаточно важным фактором, влияющим на параметры вибраций выдвижных устройств, является наличие промежуточной опоры, что является актуальным для многих существующих конструкций. При взаимодействии с промежуточной опорой возникают реакции, значительно влияющие на амплитудно-частотные характеристики конструкции выдвижного устройства. Для учета данного фактора был разработан программный комплекс [15]. При определении вибропрочностных характеристик выдвижного устройства задается положение промежуточной опоры, а также ее податливость.

Эксплуатация АНПА с выдвижными устройствами в рабочем положении, как правило, осуществляется вблизи свободной поверхности, где волновые нагрузки являются существенными. Поэтому необходимо учитывать фактор морского волнения на общие силовые воздействия и, как следствие, параметры вибрации. На основе соотношений для определения волновой нагрузки на преграду, подверженную влиянию регулярного волнения [16] был разработан и реализован в виде программного комплекса [17] численный метод расчета коэффициентов волновой нагрузки на выдвижные устройства движущегося подводного объекта.

Использование предлагаемых подходов и разработанных численных методов определения вибропрочностных характеристик выдвижных устройств АНПА позволит прогнозировать параметры вибрации данных конструкций и прорабатывать мероприятия по устранению негативных последствий, в том числе на ранних стадиях проектирования.

#### Список литературы

- [1] Илларионов Г.Ю., Сиденко К.С., Бочаров Л.Ю. Угроза из глубины: XXI век. – Хабаровск: КГУП «Хабаровская краевая типография», 2011. – 304 с.
- [2] MARUM. Vehicle-2 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.marum.de/en/Vehicle-2.html> (дата обращения: 26.03.2026).
- [3] JAMSTEC. URASHIMA8000 – Deep Sea Cruising AUV [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.jamstec.go.jp/e/about/equipment/ships/urashima.html> (дата обращения: 26.03.2026).
- [4] French, Daniel W. Analysis of unmanned undersea vehicle (UUV) architectures and an assessment of UUV integration into undersea applications. Diss. Monterey, California. Naval Postgraduate School, 2010.

- [5] Vandenberg, Troy D. Manning and maintainability of a submarine Unmanned Undersea Vehicle (UUV) program a systems engineering case study. Diss. Monterey, California. Naval Postgraduate School, 2010.
- [6] Sutton H. I. China Navy Reveals New Large Underwater Robot Which Could Be A Game Changer [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.forbes.com/sites/hisutton/2019/10/01/china-reveals-new-robot-underwater-vehicle-hsu-001/> (дата обращения: 26.03.2026).
- [7] Hernández, Juan David, et al. "AUV online mission replanning for gap filling and target inspection." OCEANS 2017-Aberdeen. IEEE, 2017.
- [8] Woolsey, M., et al. "Integration of a polarity-preserving chirp subbottom profiler into the NIUST AUV Eagle Ray." 2013 OCEANS-San Diego. IEEE, 2013.
- [9] International Submarine Engineering. Dorado [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ise.bc.ca/product/dorado/> (дата обращения: 26.03.2026).
- [10] Сухоруков, А.Л. Срывной флаттер как одна из причин возникновения вибраций подъемно-мачтовых устройств // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2014. Т. 7, № 3. С. 42 – 66.
- [11] Сухоруков А.Л. Изгибно-крутильный флаттер как причина возникновения гидродинамической неустойчивости подъемно-мачтовых устройств // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. Журнал РАН. 2015. Т.8, №1. С. 87 – 93.
- [12] Коваль К.А. Взаимодействие упругих конструкций с потоком жидкости. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Санкт-Петербург, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича», 2022.
- [13] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ Программа для выполнения расчетов гидроупругих характеристик подъемно-мачтовых устройств / А.Л. Сухоруков, А.Ю. Каверинский, К.А. Коваль – № 2018613264; заявл. 22.01.2018; зарег. 06.03.2018. – 1 С.
- [14] Коваль, К.А., Сухоруков А.Л. Верификация численного метода расчета гидроупругих колебаний конструкций в потоке жидкости // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2018. № 4-2 (330). С. 24 – 37.
- [15] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ Программа для выполнения расчетов гидроупругих характеристик подъемно-мачтовых устройств с учетом податливости промежуточной опоры / А.Л. Сухоруков, К.А. Коваль – № 2020663201; заявл. 12.10.2020; зарег. 23.10.2020. – 1 С.
- [16] Пронкин А.П., Хворостовский И.С., Хворостовский С.С. Морские буровые моноопорные основания. Теоретические основы проектирования и эксплуатации / Под ред. С.С. Хворостовского. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2002. – 303 с.
- [17] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ Программа для выполнения расчетов гидроупругих и вибропрочностных характеристик подъемно-мачтовых устройств с учетом волнения моря / А.Л. Сухоруков, К.А. Коваль – № 2022616663; заявл. 04.04.2022; зарег. 15.04.2022. – 1 С.

## Сканирующая зондовая микроскопия эластомерных композитов с техническим углеродом

Корнев Ю.В., Валиев Х.Х., Молчанов С.П., Гилязова Р.Ф., Власов А.Н., Карнет Ю.Н.\*

\*Институт прикладной механики РАН, Москва

\*\*Институт нефтехимического синтеза им. А.В. Топчиева РАН, Москва

В фундаментальных работах [1-8] указано, что современный этап научно-технической революции характеризуется быстрым совершенствованием технических параметров изделий, интенсификацией рабочих процессов, повышением надежности и ресурса. Каждые пять-семь лет создаются новые поколения машин, отражающие достижения научно-технического прогресса. Происходит быстрая смена конструкционных материалов, внедряются новые технологические процессы. В последние годы вместо классических полимеров для изготовления протектора автомобильных шин становится перспективным использование растворных бутадиен-стирольных каучуков (ДССК) со специальными свойствами взамен эмульсионных. По сравнению с эмульсионным бутадиен-стирольным каучуком каучуки растворной полимеризации ДССК обеспечивают более низкий гистерезис, более высокий модуль и когезионную прочность. Фирма «Мишлен» (Франция) разработала метод получения растворного бутадиен-стирольного каучука и применила в качестве наполнителя осажденную кремнекислоту. Это позволило добиться значительного уменьшения сопротивления качению при одновременном улучшении сопротивления скольжению по мокрой дороге при тех же параметрах истирания, снизить расход топлива на 5 - 7%. Большой интерес представляет исследование возможности синтеза композитов ДССК при использовании в качестве наполнителя вместо кремнекислотного наполнителя технического углерода [9-11] с последующим изучением результирующих физико-механических свойств, полученных композитов. В данной работе синтезированы и исследованы эластомерные композиты растворной полимеризации на основе дивинил-стирольного синтетического каучука ДССК-628, наполненного техническим углеродом N234. Каучук ДССК-628 (ПАО Нижнекамск, Россия) - продукт сополиме-

ризации бутадиена-1,3 и стирола в растворе в присутствии литийорганических катализаторов. Химическая структурная формула:  $[(C_8H_8)_m (C_4H_6)_n]_x$ . Технические условия: ГОСТ ТУ 20.17.10-213-05766801- 2019. Массовая доля 1,2-звеньев (на бутадиеновую часть цепи), %, в пределах 54 - 64. Массовая доля связанного стирола, %, в пределах 24 - 30. Высокодисперсный усиливающий технический углерод N 234 (ООО «Омсктехуглерод») ГОСТ 25699.13 печной, активный, получаемый при термоокислительном разложении жидкого углеводородного сырья, с высоким показателем дисперсности, обладает повышенной структурностью, и обычно обеспечивает высокое сопротивление истиранию и высокую степень усиления различных каучуков. Применяется в протекторах легковых шин с высокими эксплуатационными характеристиками, а также в высококачественных резинотехнических изделиях и конвейерных лентах. Синтез композитов проводился на лабораторном смесителе Haake PolyLab. Были синтезированы композиты ТУ-14 с концентрацией частиц наполнителя 44.4 масс частей на 100 масс частей каучука. Структура поверхности композитов изучалась на атомно-силовом микроскопе (АСМ) EasyScan (Nanosurf, Швейцария), работавшем в контактном режиме на воздухе при комнатной температуре [12] с дополнительным использованием моды модуляции силы. При этом применялась защита АСМ от внешних помех с помощью динамического анти-вибрационного столика TS-150 (Fabrik am Weiher, Швейцария). Снимки АСМ обрабатывались с использованием программных алгоритмов SPIP (Image Metrology, Дания). Все образцы испытывались на измерительном комплексе NanoTest 600 (Micro Materials Ltd, UK) методом нано-индикации для того, чтобы оценить свойства эластичного гистерезиса этого класса материалов и определить механические свойства, зависящие от степени наполнения высокодисперсными части-

цами. Поверхность образцов была подготовлена в соответствии с п.4. ГОСТ 9450-76. Использовался алмазный сферо-конический индентор с формой рабочей части в форме полусферы. Исследование проводили в нескольких точках на поверхности образца, затем данные усредняли и обрабатывали (по методу Герца) в программном обеспечении измерительного комплекса NanoTest 600.

На рис. 1 представлены АСМ снимки поверхности композита с ТУ-14. Обработка полученных снимков проводилась с помощью алгоритмов программы SPIP. Светлые области - агломераты наполнителя на снимках топографии и на снимках материального контраста размерами порядка 100 нм - 2 мкм, визуализированы на фоне структуры поверхности полимерной матрицы ДССК-628. Распределение расстояний между частицами микро и нано - наполнителя находится в диапазоне 0.5 – 7.0 мкм.

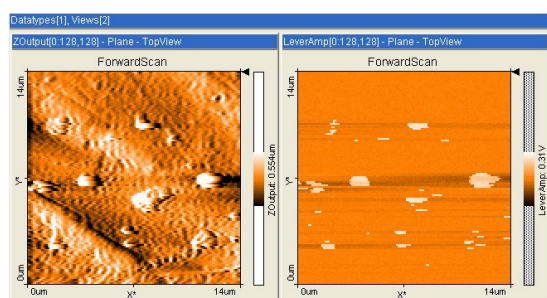


Рис. 1. АСМ изображение структуры поверхности эластомерного композита с ТУ 14 в режиме модуляции силы (слева — топография, справа — фазовый контраст). Скан 14x14 мкм

Для полученных образцов композитов определялись упруго-прочностные и гистерезисные свойства, а также образцы испытывались на измерительном комплексе NanoTest 600 методом наноиндентирования. По предварительным данным исследования величина приведенного модуля упругости композита на 25 % превысила величину модуля исходного ненаполненного каучука. В композите также наблюдается увеличение твердости и относительного гистерезиса при наноиндикации. Качественное распределение частиц влияет на механические свойства полимерных композитов с дисперсионным наполнителем. Адсорбционным связыванием сегментов каучука технический углерод формирует полифункциональные физические узлы в виде коллоидных

частиц, которые при вулканизации превращаются в химические узлы сетки, способные изменять её структуру и упрочнять резину при деформационных воздействиях. Важную роль в усилении играет полимерная природа и высокая адсорбционная и электрон-обменная активность технического углерода. Таким образом, синтезированы новые композиты ДССК-628 с использованием в качестве наполнителя технического углерода N234. С помощью АСМ установлены размеры, межчастичные расстояния и однородное распределение наполнителя в матрице эластомера. Определены упруго-прочностные и гистерезисные свойства, на измерительном комплексе NanoTest 600 методом наноиндентирования. Одним из перспективных направлений дальнейшего повышения усиления дивинил-стирольного синтетического каучука ДССК-628, наполненного техническим углеродом N234 заключается в создании его модифицированных типов. Полученные результаты важны для корреляции результирующих физико-механических свойств полученных композитов с особенностями распределения наполнителя в каучуке.

*Работа выполнена в рамках Государственной программы исследований Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН).*

### Список литературы

- [1] Мавлютов Р.Р. Дорога жизни. Уфа: УГАТУ. 2004. 313 с.
- [2] Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. Изд. Стереот. Изд. группа URSS. 2022. 560 с.
- [3] Нигматулин Р. И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. Москва. ГЭОТАР-Медиа, 2014. С. 639.
- [4] Ильгамов М.А. Краткий обзор некоторых исследований и разработок в механике. Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения (VIII Российская конференция). Уфа, 24–28 июня 2024 г. С. 5-12.
- [5] Проблемы механики и некоторые современные аспекты науки. Сборник научных трудов. Отв. Ред.: Академик В. В. Струминский. М. Наука. 1993.
- [6] Образцов И.Ф., Власов А.Н., Яновский Ю.Г., Расчетный метод оценки прочностных свойств структурно-неоднородных сред // ДАН 2006. Т. 406. №2. С. 62-79.
- [7] Яновский Ю. Г. Наномеханика и прочность композиционных материалов. М.: ИПРИМ РАН, 2008. 179 с.
- [8] Donnet Jean-Baptiste. Black and white fillers and tire compound. // Rubber Chem. Technol., Rubber reviews. 1998. Vol. 71. P. 323-334.
- [9] Корнев Ю.В., Валиев Х.Х., Власов А.Н., Карнет Ю.Н., Семенов Н.А. Эластомерные композиты, упрочненные высокодисперсными минеральными наполнителями на основе диоксида кремния и углерода // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 12-й Всероссийской научной конференции с международным

- участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва. 2022. С. 151-158.
- [10] Корнев Ю.В., Семенов П.Е., Семенов Н.А., Соляев Ю.О., Валиев Х.Х. Механические свойства эластомерных композитов, упрочненных частицами минеральных наполнителей на основе диоксида кремния и углерода // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.: Сборник трудов. В 4-х томах. (19-24 августа 2019). Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 1433-1435.
- [11] Kornev Yu. V., Semenov N. A., Vlasov A. N., Valiev Kh. Kh. Reinforcing effects in elastomeric composites, filled with particles of mineral fillers, based on silicon dioxide and carbon // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1942. 012031.
- [12] Valiev H.H., Cherepanov V.M., Karnet Yu.N., Minaev A.Ya., Stepanov G.V. Atomic force microscopy and Mössbauer spectroscopy of magnetically active silicone elastomers // IOP Conf. Series Materials: Science and Engineering. 2020. Vol. 862. 022062.

## **Modeling oil and gas field development based on self-modeling traveling-wave solutions for two-component filtration**

**Litvinova K.V.**

Lomonosov Moscow State University

This paper is devoted to constructing self-modifying traveling-wave solutions for a system of two-component flow equations with phase transitions. Such solutions are used in forecasting oil and gas field development. Within the isothermal model, two-component flow is described by a system of nonlinear partial differential equations, the solutions of which may contain discontinuities in component concentrations. In general, without additional assumptions about the fluid properties, these equations cannot be reduced to hyperbolic, parabolic, or elliptical equations, requiring the use of mathematical modeling methods. The model under consideration takes phase transitions into account and is based on the assumption of local thermodynamic equilibrium at low flow velocities. Depending on the pressure-temperature conditions, the mixture may exist in a single-phase or two-phase state (liquid and gas). The flow equations are nonlinear and combine the properties of various types of equations,

allowing for the existence of both abrupt and smooth concentration change fronts moving at a finite velocity. Self-similar solutions play an important role in verifying numerical methods and analyzing complex flow regimes, including oil displacement by water or gas. The work does not impose any restrictions on phase compressibility: both compressible and incompressible media with the possibility of phase transitions are considered.

### **References**

- [1] Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A., Samarskaya E.A., Tishkin V.F. *Methods of Mathematical Modeling of the Environment*. Moscow: Nauka, 2000, 254 p.
- [2] Litvinov V.L., Litvinova K.V. "Construction of Self-Similar Solutions to Two-Component Flow Equations in Oil and Gas Production Modeling," in *Geometric Methods in Control Theory and Mathematical Physics. III International Scientific Conference* (Ryazan, April 26-30, 2021). pp. 61-62.
- [3] Brusilovsky A.I. *Phase Transformations in Oil and Gas Field Development* - "Grait," 2002.

# Влияние формы частицы на динамику ее подъема в потоке за ударной волной

Лопато А.И.\* , Уткин П.С.\*\*

\* Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

\*\* Harbin Institute of Technology, China

Гранулированные материалы природного или искусственного происхождения широко применяются в современных технологиях и энергетике, включая горнодобывающую промышленность, пищевую промышленность, металлообработку, деревообработку и текстильную промышленность. Практический опыт показывает, что большинство подобных материалов обладают высокой взрывоопасностью. Несмотря на различия в их химической природе, взрывы различных видов пыли — не только угольной, но и алюминиевой, древесной, а также крахмальной (например, кукурузного крахмала) — характеризуются сходными закономерностями развития и одинаково разрушительными последствиями. По степени непредсказуемости, масштабу материального ущерба и числу человеческих жертв пылевые взрывы относятся к числу наиболее опасных техногенных катастроф. Сохраняющаяся частота тяжелых аварий с участием различных дисперсных материалов свидетельствует о недостаточном понимании процессов, лежащих в основе пылевых взрывов, а также мер, необходимых для их предотвращения [1].

Ударная волна, являясь неотъемлемой составляющей всех взрывных процессов, представляет собой один из основных факторов, определяющих взрывоопасность пылегазовых смесей в двухфазных системах. Это связано с рядом эффектов, возникающих при взаимодействии ударной волны с пылегазовой средой, которые ответственны не только за воспламенение, но и за формирование взрывоопасной смеси. В частности, даже распространяясь в среде, не подготовленной заранее — например, вдоль отложений горючей пыли — ударная волна способна сама формировать взрывоопасную пылегазовую смесь. Таким образом, исследование распространения ударных волн в двухфазных средах, являясь фундаментальной задачей в контексте пылевых взрывов, подчеркивает важность изучения инертной стадии фазового взаимодействия как ключевого элемента общего процесса.

Межфазный обмен импульсом в процессе релаксации за фронтом ударной волны зависит от аэродинамических свойств частиц. Вопрос о влиянии формы частиц на эти процессы особенно актуален для органических пылей растительного и минерального происхождения, поскольку их частицы имеют неправильную форму со случайным числом и геометрией граней. Экспериментальные данные о коэффициенте сопро-

тивления таких частиц ограничены, так как объекты подобной формы обычно не представляют большого интереса для классической аэродинамики.

Цель настоящей работы — исследование динамики подъема некруглой частицы с гладкой поверхностью. В качестве модельной геометрии частицы был выбран правильный треугольник с длиной ребра 1 мм. Постановка задачи качественно следует экспериментам [1, 2].

Схематичная постановка задачи представлена Рис. 1. Рассматривается двумерный канал, воспроизводящий ударную трубу. Длины камер высокого и низкого давления выбирались такими, чтобы обеспечить постоянные параметры набегающего на частицу потока в течение примерно 250 мкс. На всех границах выставлялись условия непротекания.

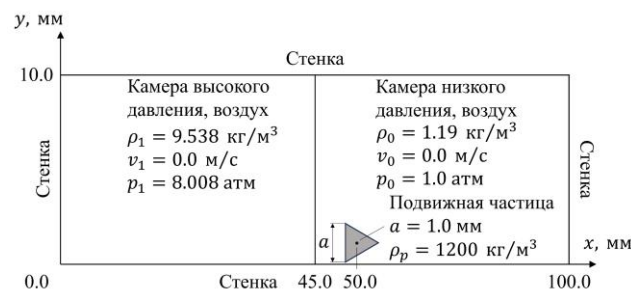


Рис. 1. Постановка задачи

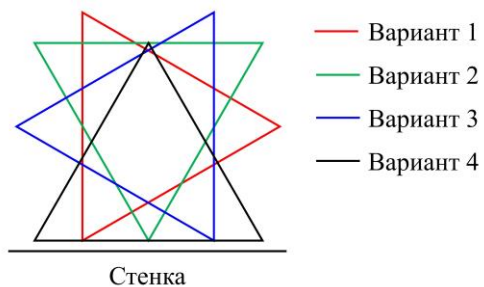


Рис. 2. Варианты начальной ориентации частицы

Были рассмотрены четыре различные начальные ориентации частицы (см. Рис. 2), отражающие неопределенность положения частицы в реальном эксперименте. Вариант 1, также представленный на Рис. 1, соответствует ситуации, когда частица изначально ориентирована одной стороной вдоль набегающей ударной волны, при этом противоположный угол смот-

рит вправо. Варианты 2 и 3 соответствуют ориентации частицы, при которой одна из ее сторон перпендикулярна набегающей ударной волне. Вариант 4 соответствует ориентации, при которой одна сторона частицы расположена вдоль ударной волны, а противоположный угол смотрит влево.

Как и в наших предыдущих работах [3, 4], движение газа описывается двумерными уравнениями Эйлера. Они решаются в прямоугольной расчетной области фиксированного размера с внутренней подвижной границей, соответствующей одной движущейся частице. Движение частицы определяется законами сохранения импульса и момента импульса. Под действием сил давления со стороны газа центр масс частицы перемещается в пространстве одновременно с ее вращением вокруг центра масс. Используется численный метод отслеживания границы (interfacetracking) [5]. Первоначально разработанный для тел круговой формы, этот метод был расширен и позволяет представлять границу частицы в виде произвольной замкнутой ломаной линии. Расчетная область разбивается на декартовы квадратные ячейки с равномерным шагом по обоим пространственным направлениям. На каждом временном шаге выделяются два типа ячеек: внутренние (полностью принадлежащие области течения) и внешние (либо полностью находящиеся внутри частицы, либо пересекаемые ее границей). Численное решение вычисляется только во внутренних ячейках. Разработанный солвер был валидирован на задаче о подъеме круглой [3] и прямоугольной [4] частицы с поверхности в потоке за ударной волной.

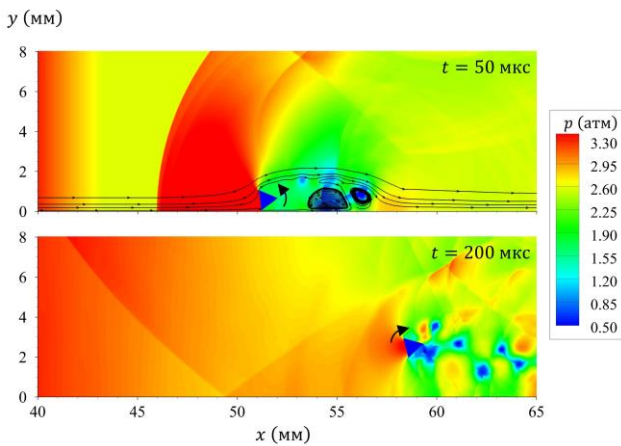


Рис. 3. Рассчитанные распределения давления в два момента времени. Стрелками указано направление вращения. Вариант 1.

Моделирование проводилось с разрешением 100 вычислительных ячеек на длину стороны треугольника, то есть размер расчетной ячейки составлял  $10^{-2}$  мм. На Рис. 3 показаны характерные структуры поля течения, практически идентичные для всех четырех рассмотренных вариантов начального расположения частицы. На ранних этапах времени после взаимодей-

ствия лидирующей ударной волны с частицей формируется типичная волновая картина, аналогичная наблюдавшейся в [3] для круглой частицы. Она включает основную волну, отраженную от частицы, несколько дополнительных отраженных волн, возникающих при взаимодействии дифрагированной ударной волны с поверхностью, а также прошедшую волну. В следе за частицей образуется зона рециркуляции с крупномасштабным вихрем, диаметр которого сопоставим с диаметром частицы. Со временем зона рециркуляции развивается и содержит несколько вихрей.

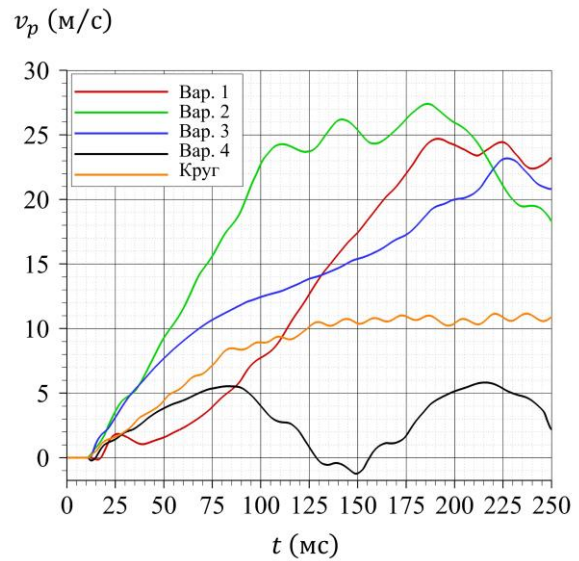


Рис. 4. Вертикальная компонента скорости частицы

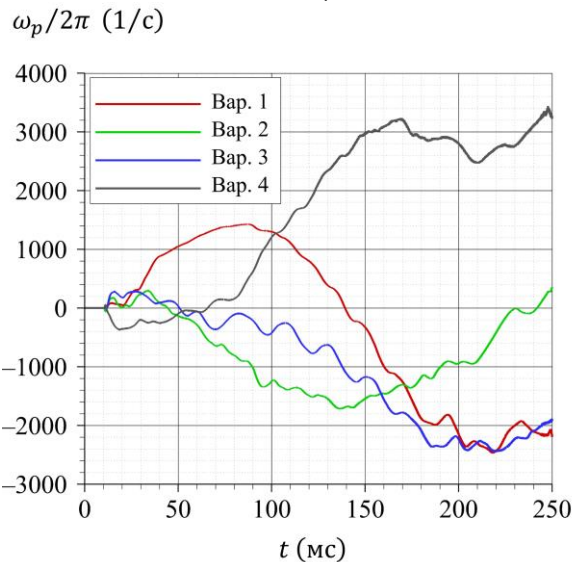


Рис. 5. Частота вращения частицы

Отрыв частицы от поверхности обусловлен образованием области повышенного давления между частицей и поверхностью. На более поздних стадиях, по мере подъема частицы на некоторую высоту, этот эффект ослабевает. Далее частица продолжает двигаться го-

горизонтально, как в свободном потоке, при этом ее вертикальная составляющая скорости остается почти постоянной и составляет около 23 м/с, см. Рис. 4.

Рис. 4 и 5 иллюстрируют вертикальную компоненту скорости центра масс частицы и частоту вращения вокруг центра масс. На Рис. 4 оранжевая кривая соответствует скорости подъема круга, площадь которого эквивалентна площади треугольной частицы. Из Рис. 4 следует, что некруглая форма частиц в большинстве случаев способствует подъему. При этом во всех случаях, когда скорость подъема некруглой частицы выше, чем для круглой, частица преимущественно вращается таким образом, что сила Магнуса была направлена вверх, способствуя подъему.

#### Список литературы

- [1] Поплавский С.В. Динамика частиц и капель в ударных волнах. Дисс. д.ф.-м.н. Новосибирск, 2011. 262 с.
- [2] Poplavski S.V. On the interphase and intra-phase interaction of particles and gas in a layer of granular materials behind shock waves // *J. Phys.: Conf. Series*. 2018. V. 1128. Paper 012040.
- [3] Utkin P., Lopato A., Jia F., Liu Z. Particle-resolved numerical simulation of a particle lift-off behind a shock wave from a rough surface // *Phys. Fluids*. 2025. V. 37. Paper 093349.
- [4] Utkin P., Lopato A. Particle-resolved numerical simulation of the motion of a square-shaped particle behind a shock wave // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2026. V. 234. P. 6761–6772.
- [5] Chertock A., Kurganov A. A simple Eulerian finite-volume method for compressible fluids in domains with moving boundaries // *Comm. Math. Sci.* 2008. Vol. 6, No. 3. P. 531–556.

## О функции Римана – Адамара для уравнения Бианки общего вида

Миронов А.Н., Миронова Л.Б.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт, Елабуга

В статьях [1], [2] для уравнений Бианки третьего и четвертого порядка исследованы существование и единственность решения задачи Дарбу, а также определена функция Римана – Адамара, построены решения задач Дарбу в явном виде в терминах функции Римана – Адамара. В работах [3], [4] построены в явном виде функции Римана – Адамара в терминах гипергеометрических функций для указанных уравнений.

Уравнение Бианки общего вида можно записать в виде

$$L(u) \equiv \sum_{\substack{0 \leq q_i \leq 1, \\ i = \overline{1, n}}} a_{q_1 q_2 \dots q_n} u_{x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}} = f, \quad (1)$$

где  $a_{q_1 q_2 \dots q_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – заданные функции,  $a_{11\dots 1} \equiv 1$ ,  $u$  – искомая функция.

Считаем, что коэффициенты уравнения (1) и его правая часть удовлетворяют включениям  $a_{q_1 q_2 \dots q_n} \in C^{(q_1, q_2, \dots, q_n)}$ ,  $f \in C$  в замыкании рассматриваемой области  $G$ . Класс  $C^{(q_1, q_2, \dots, q_n)}(\overline{G})$  означает существование и непрерывность всех производных  $\partial^{l_1+l_2+\dots+l_n} / \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_n^{l_n}$ ,  $l_i = \overline{0, q_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на множестве  $\overline{G}$ .

Пусть  $D$  – область, ограниченная плоскостями  $X_i: x_i = 0$ ,  $S: x_n = x_1$ ,  $i = \overline{2, n-1}$ , и плоскостями  $x_j = x_j^0 > 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости  $a_\alpha \in C^\alpha(\overline{D})$ .

**Задача Дарбу.** В области  $D$  найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{\overline{X_i}} &= \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ u|_{\overline{S}} &= \psi(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \varphi_i &\in C^{(1, 1, \dots, 1)}(\overline{X_i}), \quad \psi \in C^{(1, 1, \dots, 1)}(\overline{S}). \end{aligned}$$

При этом должны выполняться условия согласования  $\varphi_i|_{x_j=0} = \varphi_j|_{x_i=0}$  по всем  $i, j = \overline{1, n-1}$ ;  $\varphi_i|_{x_n=x_1} = \psi|_{x_i=0}$ ,  $i = \overline{2, n-1}$ ;  $\varphi_1|_{x_n=0} = \psi|_{x_1=0}$ .

Возьмем внутри области  $D$  произвольную точку  $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Она определяет область  $D_P$ , ограниченную плоскостями  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = \xi_1, \dots, x_{n-1} = 0$ ,  $x_{n-1} = \xi_{n-1}$ ,  $x_n = \xi_n$ ,  $x_n = x_1$ . Очевидно, область  $D_P$  можно разбить на две части:  $D^1$ , которая ограничена плоскостями  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = \xi_1, \dots, x_{n-1} = 0$ ,  $x_{n-1} = \xi_{n-1}$ ,  $x_n = \xi_n$ ,  $x_n = \xi_1$ ;  $D^2$ , которая ограничена плоскостями  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = x_n$ ,

$x_2 = 0$ ,  $x_2 = \xi_2, \dots, x_{n-1} = 0$ ,  $x_{n-1} = \xi_{n-1}$ ,  $x_n = \xi_1$ . В трехмерном случае (см. [1], рисунок 1) им соответствуют параллелепипед и призма.

Определим функцию Римана – Адамара задачи Дарбу  $H(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Пусть

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= \\ &= \begin{cases} R(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^1, \\ V(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^2. \end{cases} \end{aligned}$$

где  $R$  – функция Римана для уравнения (1).

Введем в рассмотрение конструкции  $A_{l_1 l_2 \dots l_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  [5, с. 112]. Всего имеется  $2^n$  таких конструкций (как и коэффициентов уравнения (1)), причем  $A_{11\dots 1} = 0$  есть сопряженное к (1) уравнение  $L^*(R) = 0$ , а  $A_{00\dots 0} \equiv R$ .

Будем обозначать через  $A_\alpha$  те конструкции, в которых  $R$  заменена на  $H$ , через  $A_\alpha^-$  конструкции, в которых  $R$  заменена на  $V$ , а те же конструкции с функцией  $R$  обозначим  $A_\alpha^+$ .

Обозначим пересечение области  $D^i$  с плоскостью  $x_j = \xi_j$  через  $D_j^i$ , с плоскостями  $x_j = \xi_j$ ,  $x_k = \xi_k$  через  $D_{jk}^i$  и т.д. Пересечение многообразия  $D^i$  с плоскостью  $x_n = \xi_1$  обозначим через  $D^{in}$ ,  $i = 1, 2$ .

Определим функцию  $V$  в области  $D^2$ . Потребуем выполнения условий

$$V|_{\overline{S}} \equiv 0, \quad A_{1p_1 p_2 \dots p_{n-1}}^- \equiv 0 \quad \text{на} \quad D_{q_1 q_2 \dots q_k}^2$$

при всех  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  таких, что  $p_i = 0$  при  $i \in Q_{k,n}^*$ ,  $p_i = 1$  при  $i \notin Q_{k,n}^*$ ,

$$Q_{k,n}^* = \{(q_1, q_2, \dots, q_k) \mid 2 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_k \leq n\}.$$

Далее, потребуем, чтобы на плоскости  $x_n = \xi_1$  (то есть на общей части границы  $D^1$  и  $D^2$ ) выполнялись условия

$$\begin{aligned} [A_{1p_1 p_2 \dots p_{n-1} 0}]|_{x_n=\xi_1} &= \\ &= A_{1p_1 p_2 \dots p_{n-1} 0}^+(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_1 + 0) - \\ &- A_{1p_1 p_2 \dots p_{n-1} 0}^-(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_1 - 0) \equiv 0, \end{aligned}$$

то есть скачок каждой функции вида  $A_{1p_1 p_2 \dots p_{n-1} 0}$  на соответствующей плоскости равен нулю.

Доказано, что функция Римана — Адамара определена корректно (существует и единственна в  $D_F$ ).

В терминах функции Римана — Адамара построено решение задачи Дарбу.

### **Список литературы**

- [1] Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Матем. заметки. 2017. Т. 102, вып. 1. С. 64–71.
- [2] Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 3. С. 349–363.
- [3] Миронов А.Н. О построении функции Римана — Адамара для трехмерного уравнения Бианки // Изв. вузов. Матем. 2021. № 3. С. 76–82.
- [4] Миронов А.Н., Яковлева Ю.О. О построении функции Римана — Адамара для уравнения Бианки четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 9. С. 1170–1176.
- [5] Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014. 385 с.

## Сглаживающий эффект аномальной термовязкости при обтекании подогреваемой каверны

Михайленко К.И. \*, Галикеева Р.Р.\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Уфимский университет науки и технологий, Уфа

### 1 Введение

Исследование течений вязких и неньютоновских жидкостей является одной из актуальных задач современной механики жидкости и газа. Такие течения широко встречаются в различных технологических процессах, включая транспортировку вязких нефтепродуктов и полимерных растворов, переработку полимерных материалов, а также работу теплообменных устройств и химических реакторов. В подобных системах существенную роль играет температурная зависимость вязкости жидкости, поскольку изменение температуры может заметно влиять на реологические свойства среды, распределение скоростей, структуру течения и устойчивость режимов движения [1, 2, 3].

Классические основы механики вязких жидкостей изложены в работах [1, 2], наглядные примеры различных структур течений представлены в атласе [4], а методы численного решения уравнений Навье–Стокса и основные подходы вычислительной гидродинамики подробно рассмотрены в [5, 6]. Численное моделирование течений в каналах со сложной геометрией показывает, что наличие каверны может приводить к формированию сложных вихревых структур и возникновению нестационарных режимов течения [7, 8].

Для решения подобных задач в последние годы активно используются открытые программные комплексы вычислительной гидродинамики, среди которых широкое распространение получил пакет OpenFOAM [9]. Реализация моделей температурно-зависимой вязкости в данной среде рассматривается в работе [10]. В работе [11], посвященной течению термовязкой жидкости в канале с каверной, показано, что температурные эффекты могут существенно изменять структуру течения и приводить к формированию нестационарных режимов. Однако динамические особенности течений жидкостей с температурно-зависимой вязкостью в каналах с кавернами, особенно в трехмерной постановке, изучены недостаточно полно. Переход к трехмерной постановке позволяет учитывать более сложные пространственные структуры потока, недоступные в двумерном приближении.

Целью настоящей работы является численное

исследование течения жидкости с температурно-зависимой вязкостью в канале с нагреваемой каверной и анализ динамики расхода жидкости на основе фазовых траекторий временных сигналов расхода.

### 2 Постановка задачи

Рассматривается течение термовязкой несжимаемой жидкости в трехмерном прямоугольном канале длиной  $L = 3$  см и высотой  $H = 1$  см, в одной из стенок которого расположена кубическая каверна с характерным размером  $H$ , как показано на рис. 1. Стенки каверны поддерживаются при повышенной температуре по сравнению с температурой жидкости на входе в канал. Вследствие этого в области течения формируется неоднородное температурное поле, приводящее к изменению вязкости жидкости.

Целью работы является численное исследование влияния температурной зависимости вязкости на структуру течения и динамику расхода жидкости в канале с нагреваемой каверной. Особое внимание уделяется сравнению режимов течения, реализующихся при различных законах изменения вязкости с температурой, а также анализу временных сигналов расхода и их фазовых траекторий.

Движение жидкости описывается системой уравнений сохранения массы, импульса и энергии. Для несжимаемой среды уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

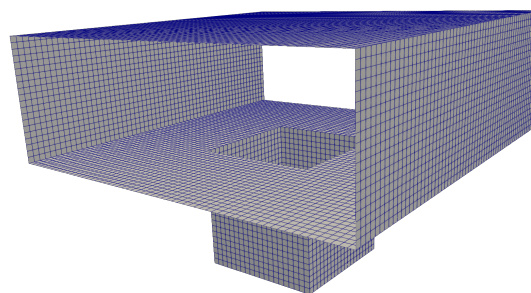


Рис. 1. Схема расчетной области

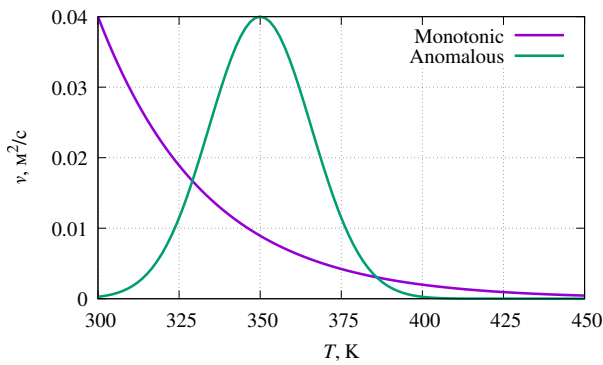


Рис. 2. Две модели зависимости вязкости от температуры

Уравнение движения записывается в форме

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot (\nu(T) \nabla \mathbf{v}),$$

где  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu(T)$  – кинематическая вязкость, зависящая от температуры  $T$ .

Температурное поле определяется из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \lambda \Delta T,$$

где  $\lambda = 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$  – коэффициент температуропроводности.

Для описания реологических свойств среды рассматриваются две модели температурной зависимости вязкости. Первая модель соответствует монотонному уменьшению вязкости при повышении температуры:

$$\nu(T) = \nu_0 \exp[-\beta(T - T_0)],$$

где  $\nu_0 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$  – значение вязкости при температуре  $T_0 = 300 \text{ К}$ ,  $\beta = 3 \cdot 10^{-2}$  – параметр, характеризующий чувствительность вязкости к изменению температуры.

Вторая модель описывает аномальную немонотонную зависимость вязкости от температуры:

$$\nu(T) = A \exp[-\alpha(T - T_P)^2],$$

где  $A = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$  задает максимальное значение вязкости,  $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$  определяет ширину зависимости, а  $T_P = 360 \text{ К}$  соответствует температуре, при которой вязкость достигает максимума.

На рис. 2 приведены зависимости обеих вязкостей для рассматриваемого в задаче диапазона температур.

На входе и выходе канала задаются постоянные давления, выбранные исходя из приблизительно одинаковых расходов обеих жидкостей: для случая монотонно убывающей вязкости  $p(0) = 2 \text{ Па}$ ,

для задачи с аномальной зависимостью вязкости от температуры  $p(0) = 0.1 \text{ Па}$ , на выходе  $p(L) = 0$ . На твердых стенках выполняются условия прилипания  $\mathbf{v} = 0$ . На входе в канал температура жидкости полагается постоянной  $T = 323 \text{ К}$ ; на нагреваемой нижней стенке каверны задается повышенная температура  $T_{\text{hot}} = 450 \text{ К}$ .

Численное моделирование проводится в пакете OpenFOAM с использованием модифицированного решателя simpleFoam, дополненного уравнением энергии и моделями выше описанных температурно-зависимых вязкостей. В качестве основной исследуемой величины рассматривается расход жидкости через входное сечение канала. Для анализа динамики течения используются временные реализации расхода и соответствующие фазовые траектории.

### 3 Результаты

Модельные расчеты проведены на трехмерной сетке, содержащей 80000 конечных объемов.

В результате проведенных математических экспериментов показано, что обе рассматриваемые системы достаточно быстро за время порядка 0.0001 с переходит от неподвижного состояния в начальный момент к условно установившемуся течению. При этом расход жидкости в обоих случаях начинает совершать переменные пульсации не фиксированной, но ограниченной амплитуды, как это можно видеть на рис. 3, где показаны массовые расходы  $Q$  (кг/с) после установления процесса.

Стоит также отметить, что при задании в модели постоянного значения вязкости, колебания расхода отсутствуют.

Представленный рисунок 3 также демонстрирует различие в амплитуде пульсаций расхода для двух типов жидкости. Так, величина пульсаций расхода для аномально термовязкой жидкости значительно больше. Однако анализ степени хаотично-

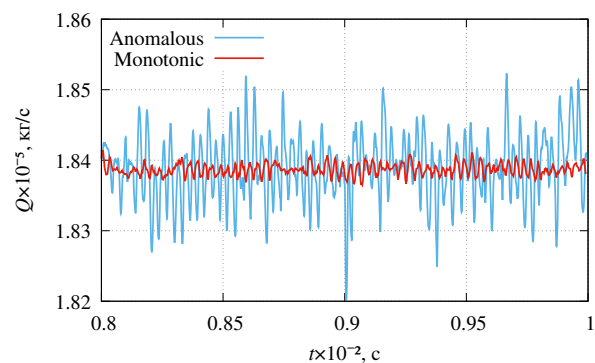


Рис. 3. Приведенный расход жидкости при монотонной и аномальной зависимости вязкости от температуры

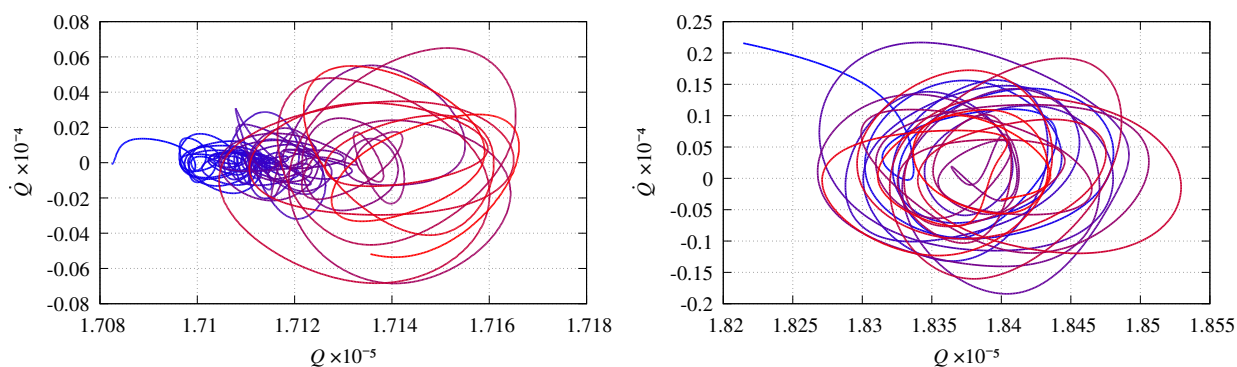


Рис. 4. Фазовая диаграмма пульсаций расхода в пространстве  $Q - \dot{Q}$  при переходе к установившемуся состоянию для жидкостей с монотонной зависимостью вязкости от температуры (слева) и anomalно термовязкой (справа); направление времени выделено изменяющимся оттенком цвета от синего к красному

сти указанных пульсаций (рис. 4) показывает, изменение расхода жидкости  $\dot{Q}(Q)$  после установления переходит к квазипериодическому движению, тяготеющего к единственному центру.

При этом на фазовой диаграмме расхода жидкости с монотонной зависимостью вязкости можно видеть, что процесс перехода к установившемуся квазипериодическим колебаниям не является одномоментным. Из рис. 5 можно видеть, что при изначально неподвижной anomalно термовязкой жидкости квазипериодические колебания с постоянным средним расходом и постоянной средней амплитудой возникают практически единомоментно приблизительно через  $10^{-4}$  с после начала течения.

В то же время, для жидкости с монотонной зависимостью вязкости от температуры, через те же  $10^{-4}$  с наблюдается переход к колебательному режиму, но при этом расход ещё некоторое время продолжает расти и окончательное установление квазиколебательного режима наблюдается приблизительно через  $1.5 \cdot 10^{-3}$  с от начала течения. Подобное поведение по-видимому можно объяснить различием в характерах течения нагреваемых жидкостей в каверне.

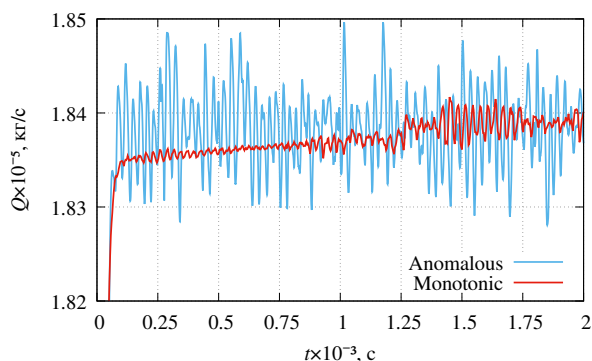


Рис. 5. Приведенный расход жидкости при монотонной и anomalной зависимости вязкости от температуры в процессе установления квазипериодических колебаний

## 4 Заключение

В ходе работы получены результаты, показывающие, что несмотря на некоторое внешнее сходство динамики жидкостей с существенно различными зависимостями вязкости от температуры, при обтекании подогреваемой области они имеют достаточно существенное различие в проявлении пульсационного режима течения. Дальнейшие исследования предполагают более глубокое изучение проявляющихся особенностей и физическое объяснение наблюдаемых различий.

### Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика*. М.: Физматлит, 2001.
- [2] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003.
- [3] Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N. *Transport Phenomena*. Wiley, 2002.
- [4] Ван-Дайк М. *Альбом течений жидкостей и газов*. М.: Мир, 1986.
- [5] Ferziger J.H., Perić M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002.
- [6] Versteeg H.K., Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Pearson, 2007.
- [7] Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // *Journal of Computational Physics*. 1982. Vol. 48. P. 387–411.
- [8] Shankar P.N., Deshpande M.D. Fluid mechanics in the driven cavity // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2000. Vol. 32. P. 93–136.
- [9] Weller H. G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // *Computers in Physics*. 1998. Vol. 12. No. 6. P. 620–631.
- [10] Payandeh M. *Implementation of a Temperature Dependent Viscosity Model in OpenFOAM*. Chalmers University of Technology, 2012.
- [11] Мухутдинова А.А. Задача о течении термовязкой жидкости в канале с каверной, содержащей охлаждающий элемент // *Многофазные системы*. 2024.

## Об одном подходе к исследованию неравновесных термодинамических процессов в пористых средах

Михайлов П.Н., Спиридонова Н.А.

Стерлитамакский филиал УУНиТ, Стерлитамак

Исследованию физических эффектов, возникающих в многофазных системах с высокой диссипацией энергии при их течении, вызывает большой интерес. Например, охлаждение большинства природных газов при фильтрации через пористую среду в докритической области создаёт потенциал для получения низких температур. Что обуславливает большой интерес к изучению данных явлений.

Исследование поля давления и термодинамических процессов пористых сред имеет большую историю.

Можно выделить различные подходы к исследованию неравновесных процессов в пористых средах. Один из них, например, изложен в работе Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. [1] Общее уравнение переноса тепла представлено в виде

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla_s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div}(\chi \nabla T). \quad (1)$$

Выражение слева представляет собой полную производную от энтропии по времени  $\frac{\partial s}{\partial t}$  умноженную на  $\rho T$ . Последняя определяет измерение энтропии данной передвигающейся в пространстве единицы массы жидкости;  $T \frac{\partial s}{\partial t}$  есть, следовательно, количество тепла, получаемого этой единицей массы в единицу времени, а  $\rho T \frac{\partial s}{\partial t}$  – количество тепла, отнесённое к единице объёма. Из (1) мы видим, что количество тепла, получаемого единицей объёма жидкости, есть  $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div}(\chi \nabla T)$ . Первый член здесь представляет собой энергию, изменение которой вызвано вязкостью жидкости, а второй – тепло, приносимое в рассматриваемый объём посредством теплопроводности. При отсутствии вязкости и теплопроводности его правая часть обращается в нуль и получается уравнение сохранения энтропии идеальной жидкости:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \text{grad } s = 0. \quad (2)$$

Заметим, что общее уравнение переноса тепла (1) содержит тензор  $v_i \sigma'_{ik}$ , определение компонент которого составляет определённые трудности и является отдельной задачей. Другая попытка описания

диссипативных процессов теплопереноса представлена в [2].

Наиболее простой и информативный подход изложен в работе А.И. Филиппова [3], в котором уравнение энергии для всей системы, включающей в себя смесь газов и скелет:

$$\begin{aligned} & \left( (1-m)\rho_s c_{ps} + m\rho c_p \right) \frac{\partial T}{\partial t} + m\nu\rho c_p \frac{\partial T}{\partial x} = \\ & = m\nu\rho c_p \varepsilon \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \left( (1-m)\rho_s c_{ps} \eta_s + m\rho c_p \eta \right) \frac{\partial P}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначив выражения для полной объёмной теплоемкости пористой среды  $c_n = (1-m)\rho_s c_{ps} + m\rho c_p$  и эффективного адиабатического коэффициента  $\eta_n = \left( (1-m)\rho_s c_{ps} \eta_s + m\rho c_p \eta \right) / c_n$ , уравнение термодинамики пористой среды представляется как

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \rho m v \frac{c_p}{c_n} \frac{\partial T}{\partial x} = \eta_n \frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon \rho m v \frac{c_p}{c_n} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (4)$$

Это есть искомое уравнение для температурного поля, индуцированного полем давления в проницаемой среде.

Необходимо заметить, что уравнение (4) не содержит тензоров, которые встречаются в подходе Ландау Л.Д.

Вывод уравнения поля давления рассмотрен в работах [4,5] и основан на законах сохранения массы для жидкой и твердой фазы

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(m\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_s (1-m)}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

А также законы сохранения импульса (уравнение движения), записанное в виде:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu m}{k} v = 0, \quad (7)$$

и закона Дарси:

$$v = - \frac{k}{\mu m} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (8)$$

Подставив (8) в (5), при постоянных  $k, \mu, m$  получим уравнение для одномерного поля давления

$$m\beta \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \quad (9)$$

Решение этого уравнения для случая, когда на правом конце стержня в начальный момент времени создается и далее поддерживается перепад давления  $P_0$  ( $P|_{x=0} = -P_0, P|_{x \rightarrow \infty} = 0, P|_{t=0} = 0$ ) имеет вид

$$P(x, t) = -P_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{kt}} \sqrt{\mu m \beta} \right). \quad (10)$$

Решение уравнения для поля температуры, описывающее неравновесное температурное поле в коллекторе, имеет вид

$$\frac{T}{\varepsilon P_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \frac{4d \exp(-2y^2) / \sqrt{\pi} - 2ay \exp(-y^2)}{y + 2d \exp(-y^2) / \sqrt{\pi}} dy, \quad (11)$$

где  $d = \frac{c_{ж} \beta m P_0}{\varepsilon \Pi}$ ,  $a = \frac{\eta m c_{ж}}{\varepsilon \Pi}$  представляют основные безразмерные критерии для описания эффекта температурных изменений при фильтрации жидкости в нестационарных полях давления. Выражение (11) показывает, что величина температурного эффекта при движении жидкости в пористой среде в нестационарных полях давления определяется этими двумя параметрами.

Согласно полученным аналитическим выражениям, величина температурного эффекта при нестационарной фильтрации, в отличие от эффекта Джоуля – Томсона, определяется не только физическими свойствами самой жидкости ( $c_p$ ,  $\varepsilon$ ,  $\eta$ ), но и от физических характеристик пористой среды ( $m$ ,  $\beta$ ,  $c_n$ ).

Ключевой особенностью температурного эффекта является независимость его интегральной величины в устье скважины ( $z=0$ ,  $x=0$ ) от проницаемости пористой среды  $k$ . Несмотря на то что проницаемость определяет скорость фильтрации и поле давления, а также входит в уравнение теплопереноса через истинную скорость фильтрации, в итоговом выражении для температуры (11) этот параметр сокращается. Это объясняется тем, что  $k$  не входит в выражения для безразмерных параметров  $d$  и  $a$ .

Данная закономерность имеет фундаментальный характер и определяется законами сохранения массы и энергии. Принятые в работе допущения (линейный закон фильтрации, высокая диссипативность) не влияют на этот вывод.

С практической точки зрения этот вывод имеет принципиальное значение. Он устанавливает ограничение на возможность определения проницаемости  $k$  по результатам измерения температуры на выходе из пласта. Это ставит под сомнение эффективность метода термического зондирования нефтегазовых пластов в его классическом виде и требует проведения дополнительных исследований для его обоснования.

Более тонкие детали эволюции температурных полей в неравновесных диссипативных системах могут быть изучены с помощью вычислительных экспериментов.

Выделение безразмерных параметров, от которых зависят термодинамические процессы, позволяют выявить особенности температурного поля около скважин известных действующих месторождений нефти.

#### Список литературы

- [1] Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика.
- [2] Филиппов, Михайлов П. Н., Спиридонова Н. А. Баротермический эффект в газах в изолированном пласте / Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87. – № 5. – С. 1011-1016.
- [3] Филиппов А. И. Баротермический эффект в жидкостях. Уфа : Гилем, 2006 - 185 с.
- [4] Филиппов А. И., Спиридонова Н. А. Неравновесные эффекты в сильно диссипативных термодинамических системах. Известия высших учебных заведений. Физика. 2021. Т. 64. № 3(760). с. 148–160.
- [5] Filippov A. I., Spiridonova N. A. Non-equilibrium effects in highly dissipative thermodynamic systems. Russian Physics Journal. 2021. V. 64. № 3, p. 539–552.

## Влияние условий теплообмена на течение растворов ПАВ<sup>1</sup>

Мухутдинова А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматривается течение мицеллярного раствора ПАВ [1] в кольцевом канале. Предполагается, что температура втекающей жидкости выше, чем температура окружающей среды. На Рис. 1 показана зависимость вязкости от температуры для раствора катионных сурфактантов, точками приведены данные из статьи, кривой их аппроксимация.

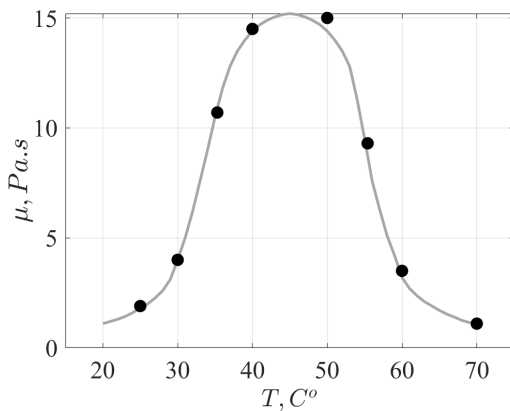


Рис. 1. Зависимость вязкости от температуры

Математическая модель рассматриваемого процесса представляет собой систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности, обобщённых уравнений Навье-Стокса [2], описывающих течение несжимаемой жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры и уравнения конвективной теплопроводности. Уравнения математической модели реализованы с помощью компьютерного кода на основе метода контрольного объема и алгоритма SIMPLE, модифицированных для учета переменного коэффициента вязкости. Оригинальный компьютерный код реализован на языке программирования C++ в кроссплатформенной среде разработки Qt Creator.

Установлено, что резкое изменение теплообмена вдоль оси канала [3] может приводить к возникновению автоколебаний расхода жидкости. Данный эффект обусловлен динамикой вязкого барьера: изменение его положения, формы и размеров вызывает периодические колебания расхода. Показано влияние граничных условий на структуру потока и расход жидкости. Получены затухающие и

слабо нелинейные колебания томсоновского типа (Рис. 2). Основные закономерности подтверждают результаты исследований [4]. Показано влияние граничных условий на структуру потока и расход жидкости.

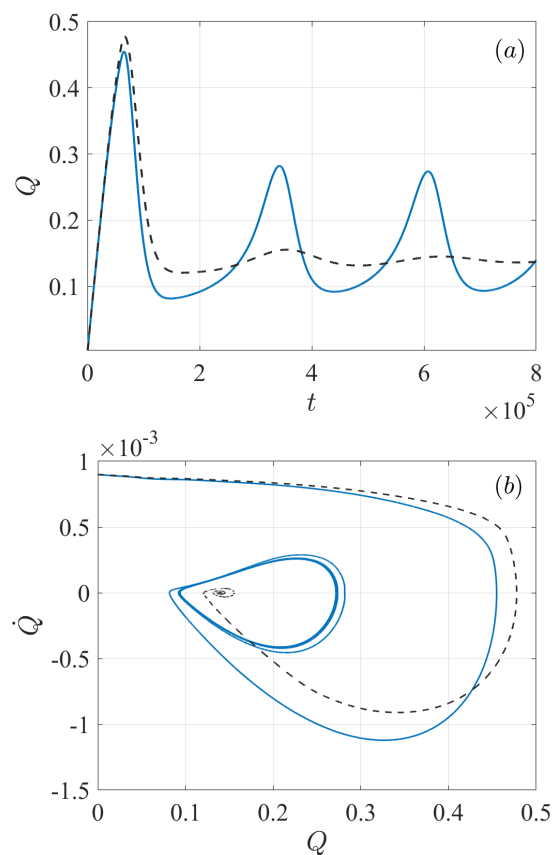


Рис. 2. Динамика изменения расхода раствора ПАВ: (а) зависимость расхода от времени, (б) фазовая траектория.

### Список литературы

- [1] Kalur G.C., Frounfelker B. D., Cipriano B. H., Norman A. I., Raghavan S. R. Viscosity increase with temperature in cationic surfactant solutions due to the growth of wormlike micelles // *Langmuir*. 2005. Vol. 21 No. 24, P. 10998-11004.
- [2] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2. М.: Физматлит, 1963. 728 с.
- [3] Киреев В.Н., Мухутдинова А.А., Урманчеев С.Ф. Режимы автоколебаний при течении аномально термовязкой жидкости // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2024. Т.514. № 1. С. 63–69.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданиям FMRS-2024-0001, FMRS-2026-0012.

## Параметрический анализ рассеяния акустической волны на множестве сферических частиц в трехмерном пространстве

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Задача акустического рассеяния волны на множестве сферических частиц является многопараметрической. Изучение механизма процессов, протекающих в таких сложных системах, невозможно проводить только аналитическими методами, для этого необходимо применять численные исследования. Поэтому одной из важных и актуальных подзадач является определение параметров (факторов), изменение которых существенным образом влияет на всю систему. Полный анализ рассматриваемого механизма включает также выявление взаимосвязей между существенными параметрами и получение количественной оценки степени их влияния.

При проведении серии вычислительных экспериментов, когда необходимо варьировать несколькими параметрами системы для определения вклада каждого из них в искомую величину, одним из инструментов теории планирования эксперимента является полный факторный эксперимент (см., например [1, 2, 3]) (ПФЭ), позволяющий эффективно исследовать линейные модели. Для нелинейной модели, когда необходимо учитывать также квадратичный вклад факторов, предпочтительно использовать более экономичный метод ортогонального центрального композиционного планирования (ОЦКП) (см., например, [4, 5]), в котором число опытов меньше, чем в ПФЭ, что позволяет существенно сократить объем вычислений за счет уменьшения числа расчетов без существенной потери точности решения.

В настоящей работе метод ОЦКП применен для численного анализа рассеяния акустической волны на множестве сферических препятствий. Вычислительный эксперимент был реализован для трехмерных конфигураций с равномерным распределением частиц одинакового радиуса, разного числа сфер и трех основных факторов. Рассмотрены две различные целевые функции: полное сечение рассеяния, что позволило провести анализ чувствительности системы к малому изменению параметров в целом, и функция нормированного давления в фиксированной точке, которая позволила проанализировать изменение в фиксированной точке пространства.

Для примера приведены результаты для трехслойной равномерной конфигурации, состоящей

из  $N = 3 \times 9 \times 9$  звуконепроницаемых сфер одного радиуса  $a$ , центры которых расположены в узлах правильной сетки в плоскостях  $x = -\delta l$ ,  $x = 0$  и  $x = \delta l$  с наименьшими расстояниями между узлами равными  $\delta l$ . На систему воздействовала сферическая волна от монополюсного источника излучения, расположенного в точке  $(-d_{M_s}, 0, 0)$ . Рассмотрено отклонение на 10 % следующих факторов: волновой радиус ( $ka = 1$ ,  $k$  — волновое число), комплексная проводимость поверхности сфер ( $\sigma = 0.5k$ ) и наименьшее расстояние между центрами сфер ( $\delta l$ ), а также целевая функция — функция нормированного давления в точке  $(d_{M_s}, 0, 0)$ , то есть за системой сфер, расположенной симметрично монополюсному источнику излучения.

Численная методика для трехфакторного вычислительного эксперимента приведена в работе [6]. Для полученного уравнения регрессии проведена проверка адекватности модели с помощью  $F$ -критерия Фишера, которая дала положительный результат для всех рассмотренных случаев. Проверка значимости коэффициентов данного уравнения с помощью  $t$ -критерия Стьюдента, позволила определить факторы, изменение которых существенно влияет на целевые функции, а числовые значения коэффициентов — оценить степень влияния (для линейных слагаемых) и взаимного влияния (для нелинейных слагаемых) факторов системы. Полученное уравнение регрессии позволило установить характер влияния изменения параметров на целевые функции, а также провести поиск наибольшего и наименьшего значений во всей трехмерной области изменения параметров.

На рис. 1 и 2 приведены диаграммы распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  ( $p$  — давление в текущей точке пространства,  $p_{in}$  — давление падающей волны) для представленного примера в плоскостях  $x = -d_{M_s}$  и  $x = d_{M_s}$ , демонстрирующие отраженные волны и волны, прошедшие через систему, для найденных с помощью данной численной методики минимального и максимального значений целевой функции (соответствующие кодированные параметры  $\bar{x}_{min}$  и  $\bar{x}_{max}$ ).

Из рис. 1(а) видно, что для  $\bar{x}_{min}$  отраженные волны повышают давление в углах области, в то время как для  $\bar{x}_{max}$  (рис. 1(б)) области повышенного и пониженного давления распределены практи-

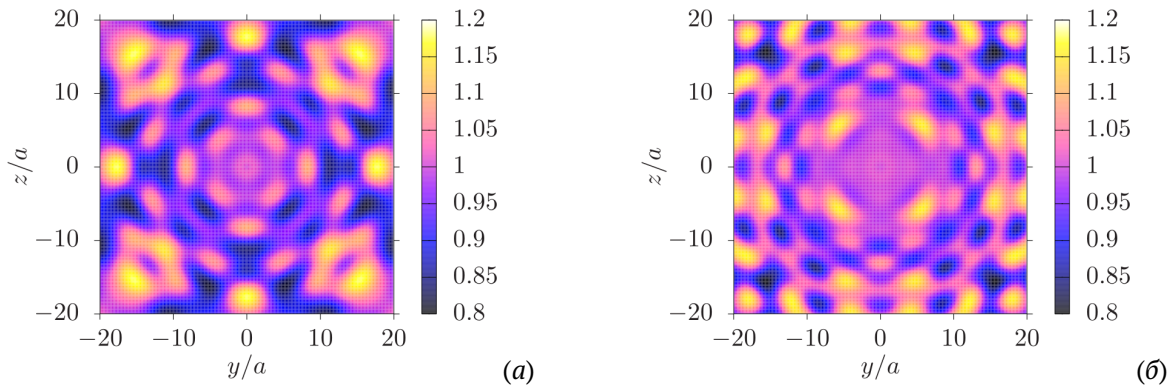


Рис. 1. Диаграммы распределения давления в плоскости  $x = -d_{M_s}$  при наборах кодированных параметров  $\bar{x}_{\min} = (-0.56, 1, 0.18)$  (а) и  $\bar{x}_{\max} = (1, 0.04, 1)$  (б)

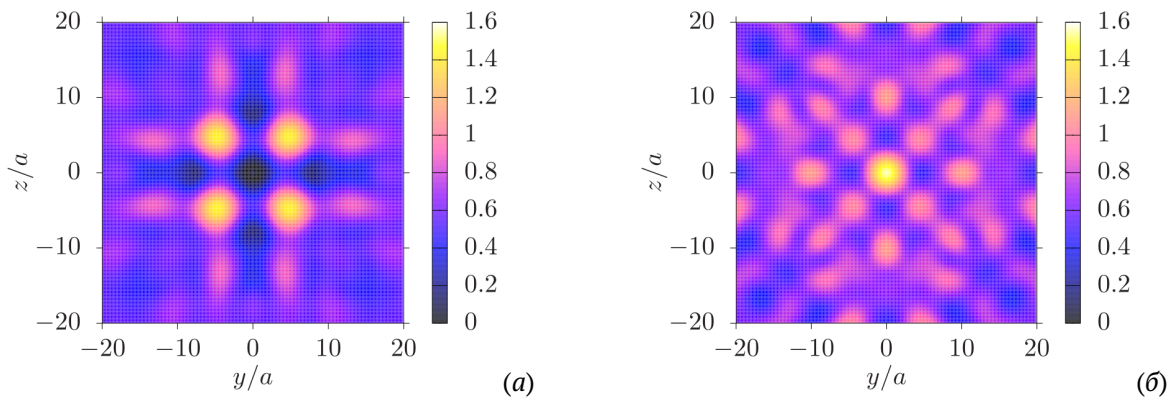


Рис. 2. Диаграммы распределения давления в плоскости  $x = d_{M_s}$  при наборах кодированных параметров  $\bar{x}_{\min} = (-0.56, 1, 0.18)$  (а) и  $\bar{x}_{\max} = (1, 0.04, 1)$  (б)

чески равномерно.

Построенные диаграммы распределения давления за системой звуконепроницаемых сфер для наибольшего и наименьшего значений целевой функции (рис. 2) также демонстрируют характерные зоны повышения или понижения давления. Видно, что для  $\bar{x}_{\min}$  в центре наблюдается область резкого падения давления за сферами (рис. 2(а)), а вокруг данной области располагаются четыре области, где давление превышает давление падающей волны до 1.6 раза. Для  $\bar{x}_{\max}$  центральная область, наоборот, является областью повышенного давления (до 1.6 раз, рис. 2(б)). Таким образом, можно выбрать параметры так, чтобы добиться в определенной точке пространства либо повышения, либо падения давления. Данное наблюдение позволяет провести аналогии со случаями одиночных сфер (сферическая линза или пятно Пуассона) [7].

Следует отметить, что строгое рассмотрение многократного рассеяния на простых модельных системах является первым шагом в понимании явлений, связанных с многократным рассеянием волн. Применение численной техники, основанной на методе ОЦКП, и анализ полученных результатов на системах, имеющих регулярные configura-

ции, позволит в дальнейшем рассмотреть задачи с реальными системами, содержащими конечное число рассеивателей.

*Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).*

**Список литературы**

- [1] Fisher R.A. The Design of Experiments, 9th Edition. Hafner Press, 1971. 256 p.
- [2] Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. 312 с.
- [3] Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. 254 с.
- [4] Володарский Е.Т., Малиновский Б.Н., Туз Ю.М. Планирование и организация измерительного эксперимента. К.: Высшая школа, 1987. 280 с.
- [5] Oyejola B.A., Nwanya J.C. Selecting the Right Central Composite Design // International Journal of Statistics and Applications, 2015. V. 5, no. 1. P. 21–30.
- [6] Насибуллаева Э.Ш. Численное исследование акустического рассеяния на системе звуконепроницаемых сфер методом ортогонального центрального композиционного планирования // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование», 2025. Т. 18, № 4. С. 74–85.
- [7] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.

## Об устойчивости течения термовязкой жидкости в плоском и кольцевом каналах

Низамова А.Д.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Теория гидродинамической устойчивости длительный период развивалась в рамках классических представлений о течении вязких жидкостей, которые предполагали постоянство физических коэффициентов, в том числе и динамической вязкости [1]. При этом решение многих задач гидродинамики требует учёта теплообменных процессов, взаимодействия параметров, определяющих динамику потока, с температурным полем. Это взаимодействие осуществляется, прежде всего, через зависимость физических коэффициентов от температуры. Особенно остро проблема математического моделирования и прогнозирования результатов такого взаимодействия возникает при изучении переходных процессов, описываемых теорией гидродинамической устойчивости. Отсюда следует необходимость расширения модельных представлений при постановке соответствующих задач и создания теоретической базы для дальнейших исследований.

Практическая целесообразность исследований в указанном направлении обусловлена целым рядом технологических процессов, связанных, в частности, с течением хладагентов в промышленных холодильных системах или использованием жидкометаллических теплоносителей в теплообменниках судовых установок [2].

Первыми публикациями по устойчивости течения жидкостей с вязкостью, зависящей от температуры, являются работы Поттера и Грабера [3] и Уолла и Уилсона [4], в которых была впервые сформулирована задача об устойчивости жидкости при наличии теплообмена и обнаружено уменьшение критического числа Рейнольдса.

В работе [5] рассматривается линейный анализ устойчивости течения жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры в плоском канале под действием давления. Стенки канала поддерживаются при различных постоянных температурах, а при моделировании температурной зависимости вязкости жидкости

применяется закон Наме. Выводится система уравнений, состоящая из модифицированного уравнения Орра-Зоммерфельда и линеаризованного энергетического уравнения, которое решается с использованием метода спектральной локализации. Результаты указывают, что влияние нагрева является дестабилизирующим. Также показано, что критическое число Рейнольдса уменьшается на один порядок с увеличением числа Наме.

В настоящей работе рассматривается течение несжимаемой жидкости в плоском и кольцевом каналах с нагреваемой верхней и внутренней стенками с экспоненциальной зависимостью вязкости жидкости от температуры. Математическая модель процесса состоит из уравнений Навье-Стокса, неразрывности и сохранения энергии, которая при рассмотрении возмущений в виде бегущей волны и при выполнении линеаризации алгебраическими преобразованиями приводится к безразмерному виду, и сводится к обобщенному уравнению Орра-Зоммерфельда. Для решения используется спектральный метод разложения по полиномам Чебышева первого рода.

В результате проведенных исследований построены спектральные характеристики течения жидкости в плоском и кольцевом каналах для жидкостей с различными теплофизическими свойствами. Проведено сравнение результатов с ранее полученными автором работами [6].

*Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданиям FMRS-2024-0001, FMRS-2026-0012.*

### Список литературы

- [1] Drazin P.G. Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 2002.
- [2] Боришанский В.М., Кутателадзе С.С., Новиков И.И., Федынский О.С. Жидкометаллические теплоносители. М.: Атомиздат. 1976. 328 с.
- [3] Potter M.C. and Graber E. Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // Phys. Fluids. 1972. 15. P. 387–391.

- [4] Wall D.P., Wilson S.K. The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependent viscosity // *J. Fluid Mech.* 1996. 323. P. 107–132.
- [5] Sahu K.C., Matar O.K. Stability of Plane Channel Flow with Viscous Heating // *Journal of Fluids Engineering.* 2010. Vol. 132. 011202-1
- [6] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2021. Vol. 42. Issue 9. P. 2211–2215. DOI: 10.1134/S1995080221090249

## Фильтрация дисперсных сред с пористой структурой органического и неорганического происхождения

Овинов Е.В., Ахметов А.Т.

ИМех УФИЦ РАН, Уфа

В кости пористая структура выполняет функцию кроветворной структуры, где полости формируют специализированную среду для самообновления и дифференцировки кроветворных стволовых клеток; таким образом, кровь образуется непосредственно внутри костных пор (рис. 1). В костной ткани скорость фильтрации крови в порах при физиологической нагрузке составляет ~0,1 мкм/с, а объемный кровоток, определенный радиоизотопным методом в костном мозге, оценивается как 0,5 мм<sup>3</sup>/с на 1 г ткани [1, 2]. Если принять, что 1 г ткани соответствует 1 см<sup>3</sup>, то линейная скорость крови составляет 5 мкм/с.

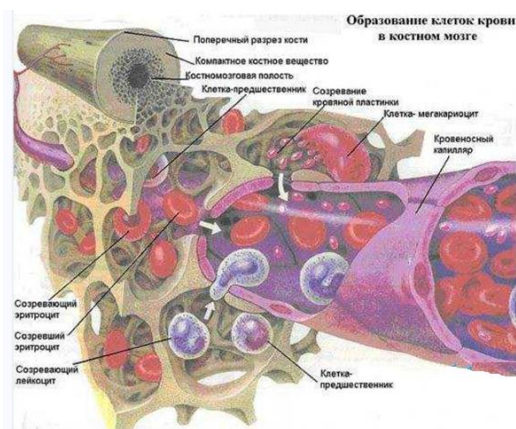


Рис. 1. Схема образования клеток крови в костном мозге // URL: <https://vet-eng.ru/wp-content/uploads/2026/01/v-kakix-kostyax-krasnij-kostnij-mozg-0fnf4l34.jpg>

В горных породах пористая среда (коллектор) служит резервуаром для нефти, но не местом её образования – нефть генерируется в материнских породах в процессе образования органического вещества при термобарических условиях, после чего мигрирует в пористый коллектор, где происходит её аккумуляция. В горных породах скорости фильтрации варьируются от 10 мкм/с (песчаники) до 1 мм/с (трещиноватые породы) [3,4].

Изучению процессов в пористой среде кости мешает вариабельность её образцов, аналогичная проблема и с образцами ядра. Поэтому необходимо создание моделей для скрининговых тестов. При равных условиях экспериментов можно добиться более высокой точности результатов для течений дисперсных систем. Дисперсными системами

являются кровь в кости и эмульсия в керне (рис. 2). Размеры клеток в крови человека: эритроциты ~8 мкм, лейкоциты до ~20 мкм, тромбоциты ~3 мкм.

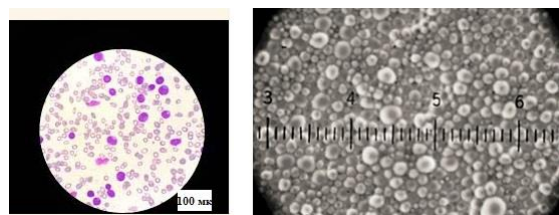


Рис. 2. Кровь человека (слева) и эмульсия «вода в масле» (справа). Каждое малое деление 5 мкм // URL: <https://masters.donntu.ru/2012/feht/ilina/library/images/art10.3.jpg>

Целью работы является создание микрофлюидной модели пористой части костной ткани. Для этого нами была проведена визуализация структуры образцов костной ткани с использованием микроскопа Zeiss Stemi-2000C. Образцы были выпилены и прошли процедуру обезжиривания. В результате получена ячеистая структура губчатой кости с размерами пор до 1 мм (рис. 3).

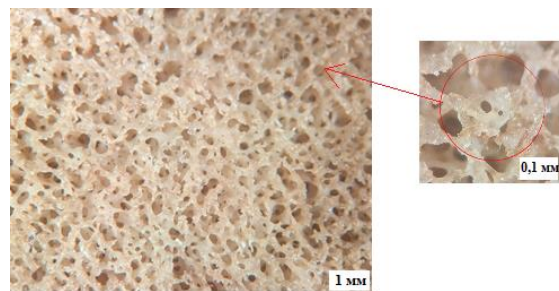


Рис. 3. Изображение пор в костной ткани ребра (слева) и пример связывающих каналов (справа)

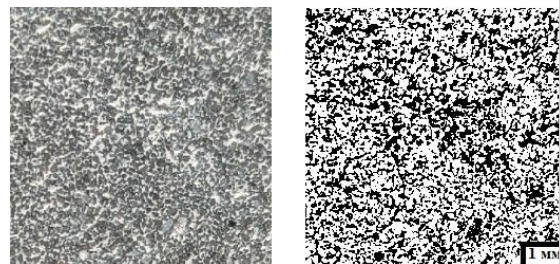


Рис. 4. Фото песчаника (слева) и его бинарное изображение (справа)

Для сравнения изучен образец керна песчаника. На рисунке 4 изображена фотография песчаника и её версия в бинарном виде. Белые пятна – скелет породы, темные пятна – поры. Отношение площади пор к общей площади образца найденное при помощи ПО ImageJ составило 40%.

Рассмотрим пористость и топологические свойства пористых структур.

Пористость – это отношение объема пор к общему объему пористого тела. В здоровой губчатой кости пористость составляет 50-90%, что обеспечивает оптимальное соотношение прочности и массы. Для горных пород-коллекторов (терригенных) самое большое значение для пористости 30%. Очевидно, что кость имеет намного большее значение пористости в сравнении с керном.

Для пористого пространства топологию можно принимать в качестве характеристики описывающей соединения пор между собой.

В работе [5] под топологией порового пространства понимается структура их взаимных соединений, как поры связаны друг с другом, сколько соседств у каждой поры (координационное число) и существует ли путь для течения жидкости. Топологию восстанавливают стохастически на основе кривых капиллярного давления: поры случайно размещают в расчётной области и соединяют их каналами, соблюдая ограничения по расстоянию и числу связей. Варьируя корреляционный параметр - максимальный радиус связи - автор регулирует связанность системы и отношение между общей и открытой пористостью. Элементарный представительный объём (ЭПО) для проницаемости оказывается больше, чем для пористости, потому что проницаемость чувствительна именно к топологической связности, а не просто к объёму пустот.

Топология кости – это структура с выборочными размерами полостей связанных между собой мелкими порами. Топология горной породы (терригенные) – случайная структура пор в межзерновом пространстве, сформированная геологическими процессами (осаждение, трещинообразование). Применение

полученной информации про поры (пористость, связь между порами) позволяет создать физические модели пористой среды кости и горной породы для дальнейших гидродинамических экспериментов: черный цвет – поры, белый цвет – скелет (рис. 5).

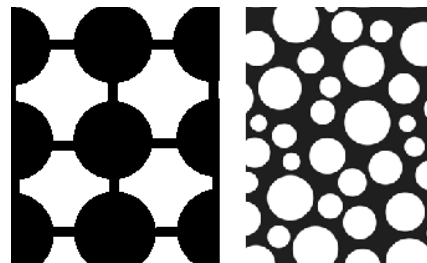


Рис. 5. Модель для кости (слева) и горной породы (справа)

Таким образом, выработаны принципы построения структур пористых сред костной ткани и горных пород, получены характеристики для изготовления микрофлюидных чипов и проведения скрининговых гидродинамических экспериментов.

#### Список литературы

- [1] Свешников К.А., Русейкин Н.С. Микроциркуляция при репаративном процессе после переломов у больных остеопорозом // Современные проблемы науки и образования. 2008. № 2 С. 29-34.
- [2] Salles S., Correia M., Barakat M., et al. Revealing intrasosseous blood flow in the human tibia with ultrasound // JBMR Plus. 2021. Vol. 5, no. 11. P. e10543. DOI: 10.1002/jbm4.10543.
- [3] Bear J. Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media. Cham: Springer, 2018. 746p. (Theory and Applications of Transport in Porous Media; vol. 31). DOI: 10.1007/978-3-319-72826-1.
- [4] Solomon D.K., Moore G.K., Toran L.E., et al. Status report: A hydrologic framework for the Oak Ridge Reservation. Oak Ridge: Oak Ridge National Laboratory, 1992. 102p. (ORNL/TM-12026).
- [5] Жижимонтов И. Н. Исследование элементарного представительного объема в масштабе порового пространства: магистерская диссертация: 03.04.02 – Техническая физика в нефтегазовых технологиях / И. Н. Жижимонтов; Тюменский государственный университет, Физико-технический институт, Кафедра механики многофазных систем. – Тюмень, 2016. – 80 с.

## О природе высокочастотных режимов кавитационных автоколебаний в гидросистемах, содержащих вентилируемую газовую каверну

С.А. Очеретяный, В.В. Прокофьев, Г.В. Топейцев

Институт механики МГУ, Москва

В струйных установках, использующих пульсирующие технологии, происходит заметный рост производительности и вместе с тем снижение удельной энергоемкости разрушения материалов и снижение потребления воды. Как правило, в таких установках для организации пульсирующих режимов работы используются механические устройства. В изучаемой здесь гидравлической схеме колебания (автоколебания) давления возникают естественно, без использования механических систем при постоянных давлении напора и массовом расходе поддуваемого в вентилируемую каверну газа. Рядом авторов [1-3] была показана принципиальная возможность использования режима кавитационных автоколебаний в системе, содержащей вентилируемую каверну, для создания периодических импульсных струй. Принципиальным тут является наличие в системе кавитатора, за которым образуется вентилируемая каверна и второго сопротивления (выходного сопла). Механизм обратной связи начинает работать, когда кормовая часть каверны достигает выходного сопла генератора. Исследуются режимы работы генератора импульсных струй (Рис. 1 а, б), состоящего из кавитатора 1, вентилируемой каверны 2, соединительного канала 3 и сужающегося сопла на выходе 4. Эксперименты проведены с двумя моделями осесимметричных генераторов – на Рис. 1 а показана схема генератора с центральной струей, истекающей из отверстия диафрагмы (кавитатора), на Рис. 1 б схема генератора с центральной каверной, образующейся в результате поддува воздуха за конический кавитатор.

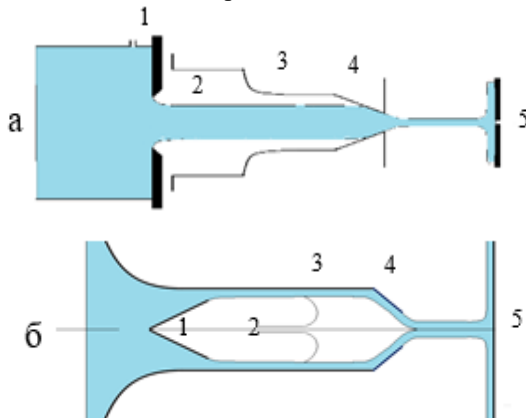


Рис. 1. Установки: центральная струя (а) и каверна (б)

Основное внимание в докладе уделено высокочастотному режиму автоколебаний, когда колебания давления в каверне и в форкамере практически отсутствуют, но имеет место прерывистое истечение жидкости из сопла, сопровождающееся интенсивным периодическим ударным воздействием струи на экран-мишень 5. Для схемы с центральной струей (Рис. 1 а) предположение, что такие автоколебания могут быть связаны с Релей-Тейлоровской (Р-Т) неустойчивостью границы струи в области истечения из сопла подкреплено анализом точного решения плоской задачи о взаимодействии конечной струи с наклонной пластиной при различных давлениях на поверхностях падающей и истекающей наружу струй. Показано, что течение с неустойчивой границей струи имеет место вблизи предельного решения, когда струя замыкается без возвратной струи на поверхности наклонной пластины. Аналогичная плоская задача для течения с центральной каверной (Рис 1 б) была рассмотрена ранее. Здесь также область течений с неустойчивой по Релею-Тейлору границей каверны находится вблизи предельного решения, когда каверна касается плоскости симметрии (каверна с точкой возврата). Режим предельного кавитационного течения имеет важное практическое значение так как он не только связан с появлением неустойчивости Релея-Тейлора, но является нижней границей появления автоколебательных режимов вообще. Отметим, что с точки зрения одномерных уравнений гидравлики варианты, показанные на Рис. 1 а, б одинаковы, но с точки зрения гидродинамики они отличаются. Достаточно сказать, что для варианта Рис. 1 а для стационарного течения диаметр выходного сечения не может быть больше диаметра центральной струи, а в другой схеме он неограничен.

На Рис. 2 представлены осциллограммы пульсаций давления в форкамере, на экране (5 Рис. 1 б), и каверне полученные экспериментально. Видно, что наблюдается высокочастотный режим автоколебаний с незначительными пульсациями давления в форкамере и каверне и сильным, строго периодическим ударным воздействием на экран. В отличие от случая центральной струи (Рис. 1 а) область высокочастотных автоколебаний в случае с центральной каверной (Рис. 1 б) возникает при заметно меньших поддувах газа в каверну, имеют несколько большую частоту и оказывают более интенсивное воздействие на экран.

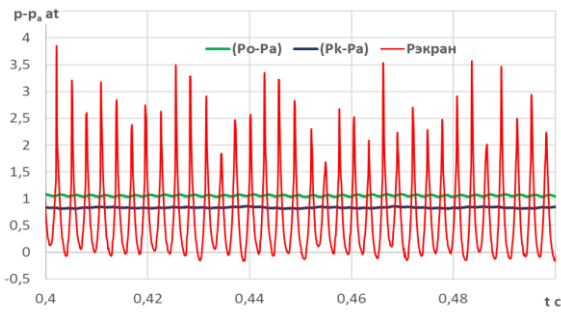


Рис. 2. Оциллограммы давлений в каверне (синяя), в форкамере (зеленая), на экране (красная).  $P_0 \approx 1.06 \text{ at}$ ,  $C_d=0.961$ ,  $C_d=0.788$

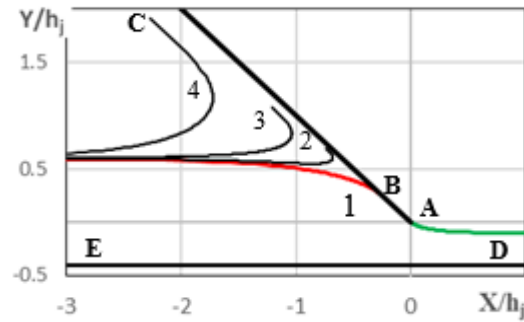


Рис. 3. Разделение струй, точное решение, плоская постановка

Плоский аналог генератора с центральной струей (Рис. 1 а) показан на Рис. 3. Так как длина генератора значительно больше ширины входного и выходного отверстий достаточно рассмотреть взаимодействие приходящей из бесконечности (толчка E) струи, текущей вдоль прямолинейной границы ED (оси или плоскости симметрии), с наклонной пластиной AC (на Рис. 3 наклон стенки сопла  $45^\circ$ ). Отличие от известной задачи о глиссировании пластины в том, что давления на поверхности падающей струи EB и струи, истекающей в пространство AD различны. Показано [5], что в случае, когда давление в каверне больше, чем во внешнем пространстве, имеется предельное решение (цветные линии на Рис. 3, красная - падающая струя, зеленая - истекающая в пространство), когда точка разветвления потоков B превращается в точку касания набегающей струи на наклонной стенке. В этом случае кривизна границы струи такова, что она неустойчива по Релею-Тейлору.

Все линейные размеры на Рис. 3 отнесены к ширине падающей струи  $h_j$ , относительная ширина сопла здесь  $d/h_j = 0.4$ , критическим условиям течения при этих геометрических параметрах соответствует коэффициент давления в каверне  $C_d^* = 0.91$  (кривая 1 на Рис. 3). Кривым 2 – 3 соответствуют значения  $C_d = 0.904, 0.891, 0.84$ . Видно, что ничтожное уменьшение коэффициента  $C_d$  приводит к исчезновению области неустойчивости. Это свидетельствует об узости области существования неустойчивых режимов, что и подтверждается экспериментом. Однако, нужно иметь в виду, что при увеличении  $C_d$  за критическое значение, в рамках принятой модели, решение не существует, стационарная струя уже не может взаимодействовать с наклонной стенкой, реально же процесс развития Р-Т структур уже на нестационарной границе продолжается и даже интенсифицируется.

На Рис. 4 показаны режимы критических течений, соответствующих схеме с центральной каверной – струя течет из бесконечности вдоль наклонной пластины EA (стенка сопла) и касается горизонтальной стенки (плоскости симметрии) в точке B. На Рис. 4 приведены результаты расчетов для наклона пластины  $45^\circ$  и для различных значений ширины сопла  $d/h_j=2.321, 1.748, 1.115, 0.483$  (линии 1-4), которым соответствуют критические коэффициенты давления в каверне  $C_d^* = 0.254, 0.347, 0.534, 0.874$ , здесь прямые линии – положение плоскости симметрии, красные кривые – поверхность каверны (граница струи со стороны повышенного давления), зеленые – форма истекающей из сопла струи. На Рис. 5 показана зависимость  $C_d^*$  от ширины выхода сопла, кружками помечены экспериментальные точки, соответствующие высокочастотному режиму для генератора с центральной каверной. Видно, что появление высокочастотного режима совпадает с условиями возникновения критического режима замыкания каверны.

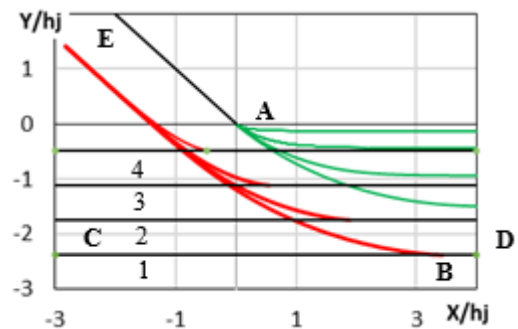


Рис. 4. Критические течения, точное решение, плоская постановка

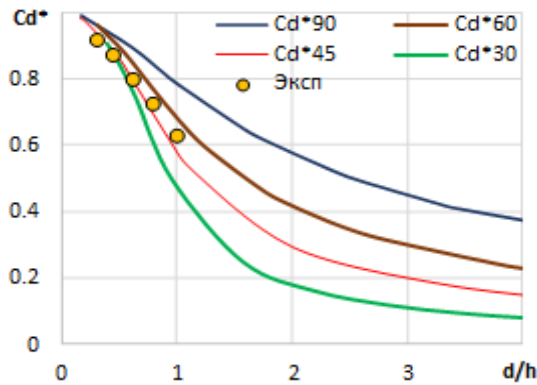


Рис. 5. Зависимость критического  $C_d^*$  от ширины выхода сопла

В работе [1] изучался естественный – стохастический режим развития Р-Т неустойчивости границы каверны. В изучаемом случае наблюдается строго периодический автоколебательный режим. Ранее [4] был проведен эксперимент по изучению влияния начальных возмущений на развитие Р-Т структур в ячейке Хеле-Шоу показывающий, что при наличии начальных периодических возмущений периодическая конфигурация перемешивания может долго сохраняться и в отличие от стохастического режима фронт перемешивания распространяется с постоянной скоростью. Эксперимент показал, что в рассматриваемом случае акустические возмущения распространяются вверх по течению и тем самым периодические возмущения генерируются уже на стадии втекания жидкости в генератор. Оценки развития Р-Т структур проводились на основании точного решения плоской задачи, с использованием формулы для скорости периодического режима Р-Т перемешивания [4], длина волны оценивалась по измеренной в эксперименте частоте колебаний. Для простоты использовалось асимптотическое решение (окружность) для разворота струи под действием перепада давления. На Рис.6 показано, что

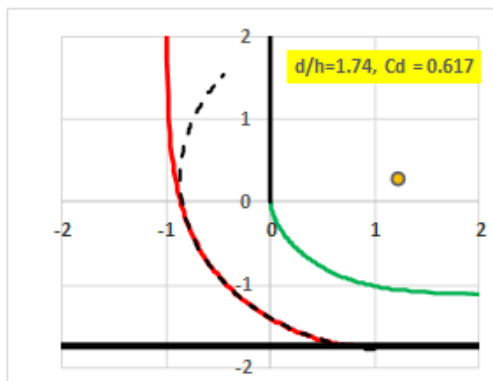


Рис. 6. Оценки развития Р-Т структур на основе данных эксперимента

для достаточно длинной каверны такое решение (штрихи) почти точно описывает форму границы каверны при истечении из сужающегося сопла (здесь с углом наклона  $90^\circ$ ).

На Рис. 7 приведены зависимости глубины проникновения периодических структур в струю  $H_w$ , отнесенную к ширине истекающей наружу струи  $\Delta$ . Видно, что эта величина порядка или больше единицы.

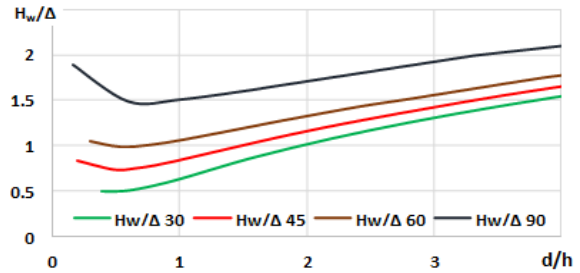


Рис. 7. Зависимость глубины проникновения структур в струю от ширины сопла

Таким образом в работе показано, что в присутствии вентилируемой каверны, в случае, когда давление в каверне больше, чем во внешнем пространстве, имеется предельное течение с неустойчивой по Релею Тейлору границей. Показано, что коэффициент давления (число кавитации), при котором в эксперименте наблюдается высокочастотный режим автоколебаний соответствует предельному режиму кавитационного течения, а развивающиеся в этом режиме периодические Р-Т структуры могут достичь размера истекающей наружу струи и привести к прерывистому режиму ее истечения.

### Список литературы

- [1] Козлов И.И., Прокофьев В.В. Закономерности развития волн на поверхности каверны с отрицательным числом кавитации // Доклады РАН. 2006. Т. 409. № 1. С. 43-47.
- [2] Шкапов П.М., Благовещенская М.М. Теоретические и прикладные вопросы динамики течений жидкости с ограниченной искусственной газовой каверной. Ч. 2 // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 4. С. 117-125.
- [3] Козлов И.И., Очеретяный С.А., Прокофьев В.В. Автоколебательные режимы в жидкой струйной завесе, разделяющей газовой области с различными давлениями // Изв. РАН МЖГ. 2013. №6. С. 33-43.
- [4] Герценштейн С.Я., Козлов И.И., Прокофьев В.В., Резниченко Н.Т., Черный Г.Г., Чернявский В.М. Неустойчивость Рэлея-Тейлора в ячейке Хеле-Шоу: влияние начальных возмущений // Изв. РАН. МЖГ 2008. № 3. С. 12-18.
- [5] Очеретяный С.А., Прокофьев В.В., Топейцев Г.В., Филатов Е.В. Автоколебания в осесимметричном генераторе импульсных струй, высокочастотный режим, связанный с неустойчивостью границы каверны // Изв. РАН. МЖГ. 2025. № 3. С. 15–29.

## Критерии полноты и методы построения решений системы фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей

Очиров А.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Механика гетерогенных жидкостей систематически теоретически и экспериментально исследуется на протяжении более чем трех столетий. Одним из первых на гетерогенность жидкостей и газов обратил внимание Дж.Г. Стокс. Однако в своих трудах он в связи с увеличением громоздкости выкладок и сложностью вычислений динамики жидкости непостоянной плотности использовал модель постоянной плотности  $\rho = const$ . [1] Это приближение активно использовалось вплоть до начала исследования внутренних волн в стратифицированном океане и атмосфере. Плотность жидкости через уравнение состояния связана с термодинамическими параметрами среды естественная стратификация жидкости. Из-за неоднородного распределения температуры, давления и химического состава происходит естественная стратификация жидкости, которую необходимо учитывать при математическом моделировании течений [2]. Полная система фундаментальных уравнений (СФУ) механики гетерогенных жидкостей содержит уравнения состояния для потенциала Гиббса, плотности и законы сохранения импульса, энергии и вещества [2, 3]. В недавних исследованиях на основе редуцированной СФУ исследованы полные решения дисперсионных уравнений, описывающие динамику и структуру периодических возмущений на поверхности [4, 5] и в толще [6, 7] в гетерогенных жидкостей. В исследовании [8] подробно расписана методика получения полных решений на основе объединенной теории регулярных и сингулярных возмущений [9, 10] на примере поверхностных капиллярно-гравитационных возмущений в гетерогенной жидкости в математической модели, использующей приближение Буссинеска. В настоящей работе рассматриваются общие принципы и методология построения решений для периодических возмущений на примере поверхностных капиллярно-гравитационных возмущений. Также внимание уделяется критериям полноты получаемых решений и обсуждению изменения их физического смысла при переходе к более простым моделям.

Рассматривается задача в двумерной постановке в декартовой системе координат  $Oxz$ , в которой ось  $Oz$  направлена вертикально вверх против направления ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$ , а горизонтальная

ось  $Ox$  совпадает с равновесным положением  $z = 0$  поверхности жидкости и совпадает с направлением распространения капиллярно-гравитационного возмущения свободной поверхности вязкой полубесконечной неограниченной несжимаемой жидкости. В пренебрежении эффектом Дюфура, источниками вещества и примеси без учета вариаций температуры редуцированная СФУ, описывающая структуру и динамику периодических возмущений в жидкости, в которой присутствует одна примесь с соленостью  $s = s(x, z, t)$  записывается следующим образом:

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \rho \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{g},$$

$$\partial_t \rho + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0,$$

$$\partial_t s + \mathbf{u} \nabla s = \kappa_s \Delta s,$$

$$\rho = \rho_0(z) (1 + \alpha_s \tilde{s}(x, y, z, t)), \quad s = s_0(z) + \tilde{s}(x, y, z, t),$$

$$\rho_0(z) = \rho_{00} \alpha_s s_0(z), \quad s_0(z) = s_{00} \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right).$$

$$\alpha_s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s}$$

Здесь  $\rho, \rho_0$  – плотность и ее равновесное распределение соответственно,  $\rho_{00}, s_{00}$  – равновесное значение плотности и солености на реперном уровне  $z = 0$  соответственно,  $\tilde{s}$  – возмущение солености, вызванное распространением периодических течений,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\kappa_s$  – коэффициент диффузии соли,  $\alpha_s$  – коэффициент контракции,  $\Lambda$  – масштаб плавучести,  $\mathbf{u}$  – скорость, которая с учетом несжимаемости жидкости выражается с использованием скалярной функции тока  $\mathbf{u} = (\partial_z \psi, -\partial_x \psi)$ , а давление  $P$  записывается в виде суммы атмосферного давления  $P_0$ , гидростатического давления и возмущения  $\tilde{P}$ :

$$P = P_0 + \int_z^\zeta \rho(x, \xi, t) g d\xi + \tilde{P}(x, z, t),$$

где  $\zeta = \zeta(x, t)$  – функция, описывающая отклонение свободной поверхности от равновесного положения.

Рассматриваемая система уравнений в слабонелинейном приближении сводится к двум дифференциальным уравнениям в частных

производных относительно скалярных функций тока и солености, которые решаются совместно:

$$\begin{aligned} \partial_{xx}\Delta\Psi + \partial_{xx}(\partial_z\Psi\Delta\Psi - \partial_x\Psi\partial_{xz}\Psi) - \\ -v\partial_t\Delta\Delta\Psi + \alpha_s s_{00} N^2 \partial_{xx}\Psi = 0 \\ (1 + \alpha_s s_{00})\partial_t\tilde{s} - \kappa_s \Delta\tilde{s} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Система уравнений (1) имеет 6 ранг и соответствующее количество корней. Причем видно, что два корня определяют характер течения соли, поскольку задача на соленость выделяется и имеет второй порядок. Оставшиеся 4 корня описывают перенос импульса в системе, два из которых можно получить с использованием теории регулярных асимптотических разложений, а два оставшихся требуют привлечения методов теории сингулярных разложений.

При упрощении модели, в котором природа стратификации не учитывается и неравномерным распределением соли в жидкости пренебрегается математическая формулировка задачи упрощается и уравнения движения с граничными условиями на свободной поверхности запишутся следующим образом [4]:

$$\begin{aligned} z < \zeta : \begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \rho v \Delta \mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{g} \\ \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \\ z = \zeta : \begin{cases} \partial_t(z - \zeta) + \mathbf{u} \cdot \nabla(z - \zeta) = 0 \\ \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \\ P - P_0 - \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} - 2\rho_{00}(r(z) + \tilde{\rho})v\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \\ \rho = \rho_{00} \left( \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) + \tilde{\rho}(x, z, t) \right) \\ \mathbf{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \frac{-\partial_x \zeta \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{e}_x + \partial_x \zeta \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$  – векторы внешней нормали и касательной к свободной поверхности соответственно. В такой формулировке после линеаризации и процедуры снесения граничных условий на равновесную поверхность для поверхностных возмущений с учетом малой глубины их проникновения задача сводится к спектральному уравнению:

$$\omega(k_x^2 - k_z^2)(ivk_x^2 - ivk_z^2 + \omega) - N^2 k_x^2 = 0,$$

в котором есть две пары решений – регулярные и сингулярные:

$$\begin{aligned} k_z = \pm \sqrt{k_x^2 - \frac{i\omega}{2v} + \frac{i\sqrt{4ik_x^2 N^2 v + \omega^3}}{2v\sqrt{\omega}}}, \\ k_l = \pm \sqrt{k_x^2 - \frac{i\omega}{2v} - \frac{i\sqrt{4ik_x^2 N^2 v + \omega^3}}{2v\sqrt{\omega}}} \end{aligned}$$

Здесь  $N = \sqrt{g/\Lambda}$  – частота плавучести жидкости, регулярные решения обозначены  $k_z$ , в пределе невязкой жидкости сводятся к известным волновым решениям и определяют динамику поверхностных волн. Сингулярные решения переобозначены  $k_l$ , в пределе невязкой жидкости эти решения исчезают и теряется класс лигаментных решений. Также можно заметить, что спектральное уравнение без учета возмущений солености становится четвертого порядка, в соответствии с рангом системы дифференциальных уравнений. Это приводит к потере сингулярных лигаментных решений, связанных с распространением соли.

Учет естественного условия затухания движения с глубиной требует выбора положительных ветвей решений  $k_{z,l}$ . Совместное решение системы уравнений с граничными условиями на свободной поверхности приводят к дисперсионному соотношению, связывающему горизонтальную компоненту волнового вектора  $k_x$ , которая может быть комплексной величиной с положительной действительной частотой  $\omega$ . Такой выбор погружения задачи в алгебру комплексных чисел позволяет получать полные решения, количество которых соответствует рангу системы уравнений, однако приводит к невозможности решения задачи устойчивости. В рассматриваемой задаче дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} (k_x^2 + k_z^2)(k_l \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega v k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - \\ - (k_x^2 + k_l^2)(k_z \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega v k_z (3k_x^2 - k_z^2)) = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma = \sigma/\rho_{00}$  – нормированный на равновесное значение на реперном уровне плотности коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Стратификация жидкости в этом дисперсионном уравнении в явном виде не прописана и входит в него при непосредственной постановке значений вертикальной компоненты волнового и лигаментного чисел  $k_{z,l}$ , содержащих частоту плавучести.

Аналитическое решение полного дисперсионного уравнения в гетерогенной жидкости даже в рассматриваемом предельно редуцированном случае возможно только с использованием асимптотических методов, однако, современные возможности электронных вычислительных машин и систем компьютерной алгебры позволяют проводить численные решения по разработанной оригинальной методике, производящей отбор физически реализуемых решений в автоматическом режиме.

В работе обсуждаются критерии полноты построения решений систем дифференциальных уравнений механики гетерогенной жидкости, базирующихся на системе фундаментальных уравнений. Показано, что кроме хорошо изученного класса волновых решений существует малоизученный класс решений, описывающий тонкоструктурные

компоненты течений – лигаменты. Учет неоднородного распределения термодинамических параметров системы и уравнения состояния приводит к увеличению в модели количества описываемых лигаментов. Волны описываются регулярными решениями СФУ или ее редуцированных версий. Лигаменты различной природы определяются сингулярными решениями. Разработанная методика с использованием объединенной теории регулярных и сингулярных возмущений позволяет получить полные решения, описывающие и крупномасштабную динамику и тонкую структуру периодических течений.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-01124, <https://rscf.ru/project/25-29-01124/>.*

### Список литературы

- [1] Stokes G.G. On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1845. Vol. 8, P. 287–319.
- [2] Chashechkin Y. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10, No. 4. Art. No. 286.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [4] Очиров А. А., Чашечкин Ю. Д. Двумерные периодические течения на поверхности несжимаемой жидкости в различных моделях среды // Изв. РАН. ФАО. 2024. Т. 60, № 1. С. 3–16.
- [5] Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field. // Axioms. 2022. Vol. 11, No. 8. Art. No. 402.
- [6] Очиров А. А., Трифонова У. О., Чашечкин Ю. Д. Расчет тонкой структуры двумерных периодических течений в сжимаемой атмосфере // ПММ. 2025. Т. 89, № 3. С. 494–511.
- [7] Chashechkin Y. D., Ochirov A. A. Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // Mathematics. 2023. Vol. 11, No. 21. Art. No. 4443.
- [8] Regular and singular components of 2d periodic fluid flows on a surface of viscous stratified fluid / Y. D. Chashechkin, A. A. Ochirov, K. Y. Lapshina, U. O. Trifonova // Journal of Harbin Institute of Technology (New Series). 2025. Vol. 32, No. 6. P. 26–37.
- [9] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 535 с.
- [10] Bender C. M., Orszag S. A. Advanced mathematical methods for scientists and engineers: Asymptotic methods and perturbation theory. New York : Springer, 1999.

## Периодические течения в сжимаемой неизотермической жидкости: акустические и гравитационные волны и лигаменты

Очиров А.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Интерес к математическому описанию колебательных и волновых процессов в жидкостях в настоящее время испытывает рост в связи с большим количеством приложений, а также аналогий, позволяющих производить перенос результатов в смежные области науки и техники. Активное развитие средств вычислительной техники, инструментов искусственного интеллекта, технических возможностей для осуществления параллельного счета больших данных и техник численного моделирования в том числе с использованием компьютерной алгебры и пакетов прямого численного моделирования позволяет решать задачи в более полных постановках и учитывать различные факторы в моделях для построения более точных и полных решений задач. Для верификации и подготовительной работы, связанной с вычислением параметров расчетных сеток в программах численного счета необходимо развитие аналитических представлений о течениях гетерогенных жидкостей с учетом состава и уравнения состояния.

Необходимость исследования параметров течений с использованием системы фундаментальных уравнений (СФУ), решаемых совместно обосновывается в работе [1]. Стоит отметить, что впервые все уравнения, входящие в СФУ приведены в [2] в разрозненном виде. В следствие большого количества технических, технологических и академических приложений большое внимание уделяется исследованию распространения акустических волн в однородной и гетерогенной средах [3 – 5]. В исследованиях [6, 7] проводилось построение полных решений с учетом тонкоструктурных элементов в толще слабосжимаемой и сжимаемой жидкости в линейной постановке.

Настоящее исследование посвящено развитию аналитической асимптотической процедуры расчета распространяющихся двумерных возмущений в толще сжимаемой неизотермической атмосферы с учетом уравнения состояния, отличного от уравнения идеального газа.

Рассматриваемая задача формулируется в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxz$ . Вертикальная ось  $Oz$  направлена против направления ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$ . Скорость жидкости  $\mathbf{u} = (u, w) = u\mathbf{e}_x + w\mathbf{e}_z$  определяется горизонтальной  $u$

и вертикальной  $w$  составляющими. К равновесным значениям давления  $P_0 = P_0(z)$  и температуры  $T_0 = T_0(z)$  добавляются малые вариации  $\tilde{P}(x, z, t)$ ,  $\tilde{T}(x, z, t)$ . В этом случае уравнение состояния можно представить в линеаризованном виде. Пренебрегая эффектами, связанными с вращением Земли, неоднородностью химического состава жидкости, а также источниками массы, импульса и тепла и основываясь на системе фундаментальных уравнений механики жидкостей можно записать редуцированную СФУ следующим образом:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0(z) \left[ 1 + \alpha_P \tilde{P} - \alpha_T \tilde{T} \right], \\ \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{u} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla \cdot \text{div} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \text{div} \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \kappa_T \Delta T = 0, \\ \alpha_P = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\rho c_S^2}, \alpha_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_S, \end{cases}$$

$$P(x, z, t) = P_0(z) + \tilde{P}(x, z, t), T(x, z, t) = T_0(z) + \tilde{T}(x, z, t).$$

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости,  $\rho_0(z)$  – равновесное распределение плотности вдоль вертикальной координаты,  $\alpha_T$  – коэффициент температурного расширения жидкости,  $\alpha_P$  – коэффициент сжимаемости в адиабатической атмосфере,  $c_S$  – скорость звука,  $\kappa_T$  – коэффициент температуропроводности. В линейной постановке для периодических течений вида  $\propto A \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t)$  можно свести задачу к системе алгебраических уравнений, из условия совместности которых строится спектральное уравнение, связывающее комплексно определенные компоненты волнового вектора  $k_{x,z}$  с действительной положительно определенной частотой периодического движения  $\omega$  и термодинамическими и кинетическими параметрами задачи:

$$M = (M_1, M_2, M_3, M_4)$$

$$M_1 = \left( \mu k_z^2 + \left( \zeta + \frac{4\mu}{3} \right) k_x^2 - i\omega \rho_0, \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) k_x k_z, ik_x \rho_0, 0 \right),$$

$$M_2 = \left( \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) k_x k_z, \mu k_x^2 + \left( \zeta + \frac{4\mu}{3} \right) k_z^2 - i\omega\rho_0, \right. \\ \left. ik_z\rho_0 + \frac{d\rho_0}{dz}, \frac{dT_0}{dz} \right),$$

$$M_3 = \left( ik_x, ik_z + \frac{g}{c_s^2}, -\frac{\omega}{c_s^2}, 0 \right).$$

$$M_4 = \left( 0, -g\alpha_T\rho_0, i\alpha_T\omega\rho_0, \kappa_T (k_x^2 + k_z^2) - i\omega \right)$$

Спектральное уравнение записывается исходя из условия совместности

$$\det M = 0.$$

В работе [7] представлена аналитическая асимптотическая методика получения полных решений спектрального уравнения для слабосжимаемой жидкости. Разработанная методика была развита на случай сжимаемой среды. В основе лежат методы объединенной теории сингулярных и регулярных асимптотических возмущений [8, 9]. Решение задачи при этом ищется в виде функции вертикальной компоненты волнового вектора  $k_z = k_z(k_x, \omega)$ . Такой выбор обоснован физическими соображениями стратификации вдоль вертикальной координаты и естественного выделения вертикальной компоненты волнового вектора. В силу громоздкости выкладок вычисления здесь не приводятся.

Получаемое спектральное уравнение имеет шестой порядок относительно вертикальной компоненты волнового вектора, что позволяет с использованием асимптотических методов получить пару регулярных решений и две пары сингулярных решений. Анализ полученных выражений показывает, что в предельных случаях решения сводятся к известным для волн (регулярные решения) и в высокочастотном приближении описывают акустические волны, а в низкочастотном – гравитационные внутренние волны и для лигаментов (сингулярные решения), определяемых различными физическими факторами и сопутствующих волнам.

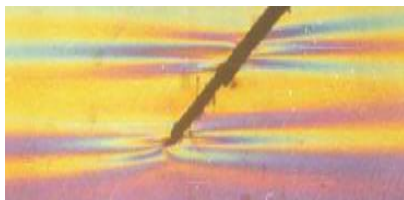


Рис. 1. Картины течения, индуцированного диффузией на неподвижной наклонной пластине  $T_b = 7.6c$ ,  $L = 7.5cm$

В лабораторном эксперименте с использованием высокоразрешающей техники наблюдаются и крупномасштабные и тонкоструктурные компоненты течений. Перенос вещества в стратифицированных средах, связанный с существованием градиента температуры или солености в жидкости порождается

течениями, индуцированными диффузией на топологии. Теневые изображения тонких течений на наклонной пластине [10] изображены на рис. 1.

Колеблущаяся пластина генерирует бимодальный пучок внутренних волн, который распространяется в поперечном направлении и одномодальный пучок волн в продольном направлении на фоне которых четко выделяются тонкие структурные течения, индуцированные диффузией (см. рис. 2) [11]:

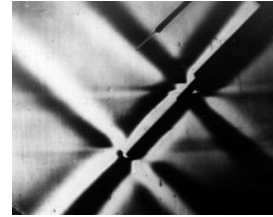


Рис. 2. Теневое изображение пучков внутренних волн и течений, индуцированных диффузией, индуцированных осциллирующей пластиной

Вертикально осциллирующая сфера порождает помимо внутренних волн тонкие структурные оболочки вокруг себя, которые с увеличением амплитуды колебаний трансформируются и усложняют визуально наблюдаемую картину лигаментов, изображенную на рис. 3 [12].

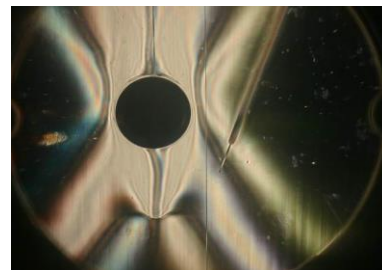


Рис. 3. Теневые изображения пучков периодических внутренних волн и лигаментных оболочек, возбуждаемых вертикально осциллирующей сферой  $D = 4.5cm$ ,  $T_b = 11.2c$ ,  $H = 2.8cm$ ,  $\omega/N = 0.8$

При описании распространения акустических колебаний в атмосфере необходимо помимо сжимаемости среды учитывать ее неоднородность и реальное уравнение состояния, которое не совпадает с уравнением состояния идеального газа. Тонкие структуры, характеризующиеся сингулярными решениями СФУ наблюдаются в высокоразрешающих экспериментах. Результаты аналитических расчетов могут быть использованы для рекомендаций при проведении экспериментальных и численных исследований для определения масштабов сеток для проведения расчетов и разрешающей способности регистрирующей аппаратуры. Количество компонентов течений в гетерогенных жидкостях

определяется рангом системы фундаментальных уравнений, описывающей ее динамику и структуру.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-01124, <https://rscf.ru/project/25-29-01124/>.*

### Список литературы

- [1] Chashechkin Y. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. V. 10, No. 4. Art. No. 286.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [3] Красильников В.А. Введение в акустику: Учебное пособие. М.: МГУ, 1992. 152 с.
- [4] Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика неоднородных сред. В 2 т. М.: Наука, 2007.
- [5] Бардаков Р. Н., Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д. Расчет скорости звука в стратифицированной морской среде на основе фундаментальной системы уравнений // *Океанология*. 2010. Т. 50., №. 3. С. 325-333.
- [6] Chashechkin Y. D., Ochirov A. A. Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, No. 21. Art. No. 4443.
- [7] Очиров А. А., Трифонова У. О., Чашечкин Ю. Д. Расчет тонкой структуры двумерных периодических течений в сжимаемой атмосфере // *ПММ*. 2025. Т. 89, № 3. С. 494–511.
- [8] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 535 с.
- [9] Bender C. M., Orszag S. A. Advanced mathematical methods for scientists and engineers: Asymptotic methods and perturbation theory. New York : Springer, 1999.
- [10] Chashechkin Yu. D. Schlieren visualization of a stratified flow around a cylinder // *J. Visualiz.* 1999. V. 1(4). P. 345–354.
- [11] Chashechkin Yu. D., Kistovich Yu. V., Smirnov S. A. Linear generation theory of 2D and 3D periodic internal waves in a viscous stratified fluid // *Environmetrics*. 2001. V. 12, No.1. P. 57–80.
- [12] Chashechkin Yu.D. Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2018. V. 13, No. 2. P. 1–29.

## Задача выделения крупных зон на основе сегментации полей физических свойств

Привалов Л.Ю.

Институт механики Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа

При решении задач теплопереноса в сложных трёхмерных областях с помощью зональных моделей [1] возникает необходимость разбиения расчётной сетки на конечное число макрозон. Каждая зона описывается одним набором осреднённых параметров — температурой, скоростью, давлением. Качество зонального разбиения напрямую определяет точность последующего зонального расчёта, поэтому выбор критерия разбиения является центральной задачей.

Формально задача сводится к кластеризации графа  $G = (V, E)$  расчётной сетки: ячейки — вершины  $V$ , а внутренние грани между ними — рёбра  $E$ . Каждому ребру  $(i, j) \in E$  приписывается вес  $w_{ij} \in (0, 1]$ , отражающий близость физических свойств в соседних ячейках. Матрица весов  $W$  задаёт аффинность графа и определяет, какие пары ячеек склонны оставаться в одной зоне. Выбор функции  $w_{ij}$  — ключевое решение, полностью определяющее физический смысл разбиения.

В данной работе используется спектральная кластеризация [2], которая может рассматриваться как низкочастотная фильтрация графа [3]. Первый этап — построение нормализованного лапласиана  $L_{\text{norm}} = I - D^{-1/2}WD^{-1/2}$ , где  $D$  — диагональная матрица степеней вершин. Второй этап — вычисление  $K$  младших собственных векторов лапласиана, образующих низкочастотное подпространство, в котором граф имеет максимальную связность. Третий этап —  $K$ -means (или QR-разложение [4]) в этом подпространстве для получения меток кластеров. Для вычисления собственных векторов применяется метод LOBPCG [4] с алгебраическим многосеточным предобуславливанием (AMG) [5], что позволяет обрабатывать сетки из  $3 \times 10^5$  ячеек за  $\sim 20$  секунд.

Рассмотрим три варианта определения весовой функции и их влияние на результат кластеризации. Расчётная область — вертикальный канал  $4 \times 4 \times 8$  мм с локальным нагревом и охлаждением (число Рэлея  $Ra \approx 4,7 \times 10^6$ ), сетка содержит 307 328 ячеек. Разбиение проводится на  $K = 60$  зон. Все иллюстрации в данной работе представляют собой сечения объёмной области в плоскости  $xOz$ .

**Вариант 1: пространственные веса.**  $w_{ij} = \exp(-d_{ij}^2/s_x^2)$ , где  $d_{ij}$  — расстояние между центрами ячеек, а  $s_x$  — коэффициент устойчивого мас-

штабирования. Разбиение стремится к равновеликим компактным зонам, без учёта физических полей (рис. 1). Такой подход даёт значительное осреднение: среднезвешенный разброс температуры внутри зон составляет  $\sigma_T \approx 2,4$  К (диапазон — до 12 К в отдельных зонах) при общем диапазоне  $\Delta T = 50$  К в области.

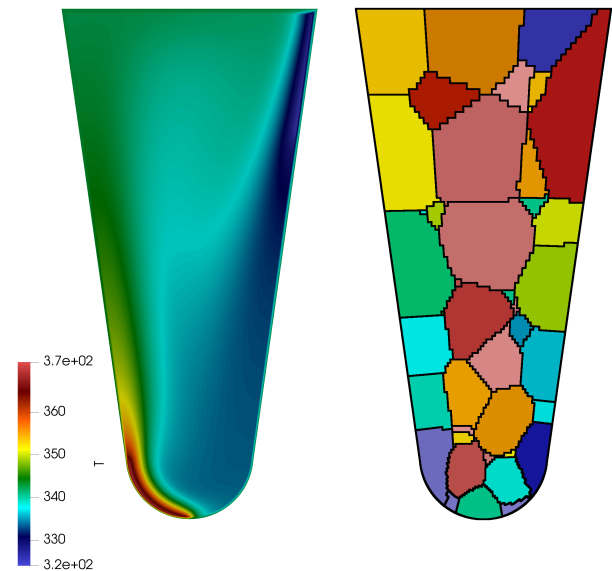


Рис. 1. Слева — поле температуры; справа — кластеризация по пространственному расстоянию, цветом обозначены различные кластеры

**Вариант 2: температурные веса.**  $w_{ij} = \exp(-\Delta T_{ij}^2/s_T^2)$ , где  $\Delta T_{ij} = T_i - T_j$ , а  $s_T$  — коэффициент устойчивого масштабирования (квантиль 0.9 распределения  $|\Delta T|$  для уменьшения влияния резких скачков). Зоны выделяют изотермы, однако граница между горячими и холодными областями проходит внутри конвективного вихря, разрывая сплошные структуры течения. Это приводит к появлению несвязных фрагментов (рис. 2), что недопустимо для зональной модели.

**Вариант 3: составные веса, учитывающие структуру течения.** Для корректного учёта гидродинамики предложена составная весовая функция:

$$w_{ij} = \omega_T \cdot f_{\text{align}} \cdot f_{\text{flow}} \cdot f_{\text{speed}} \cdot f_{\text{curl}},$$

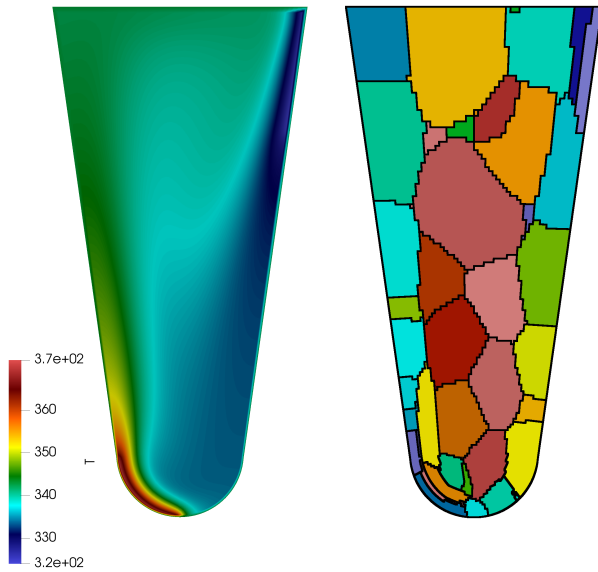


Рис. 2. Слева – поле температуры; справа – кластеризация по температуре

где температурная компонента

$$\omega_T = (1 - \alpha) \exp(-\Delta T_{ij}^2 / s_T^2) + \alpha, \quad \alpha = 0,1,$$

имеет нижнюю границу  $\alpha$ , предотвращающую обнуление весов в области сильных градиентов; множитель выравнивания

$$f_{align} = 1 - \eta_a g \left( 1 - \exp(-\overline{\cos^2 \theta} / b) \right),$$

где  $\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2} ((\hat{U}_i \cdot \hat{n}_{ij})^2 + (\hat{U}_j \cdot \hat{n}_{ij})^2)$  – средний квадрат косинуса угла между скоростью и нормалью к грани,  $b = 0,25$  – параметр ширины; множитель ослабляет влияние рёбер, параллельных потоку, способствуя проведению границ зон перпендикулярно линиям тока;

множитель координат линий тока

$$f_{flow} = 1 - \eta_f g \left( 1 - \exp(-d_\psi^2 / s_\psi^2) \right),$$

где дистанция в пространстве линий тока  $d_\psi^2 = \sum_{k=1}^3 (\lambda_k / \lambda_{max}) (\Delta \psi_k / s_k)^2$ , где  $\psi_k$  – собственные векторы ковариационной матрицы скорости  $C = U^T U / N$ , взвешенные по собственным значениям  $\lambda_k$ ; множитель удерживает ячейки с близкими координатами линии тока в одной зоне;

множитель скорости  $f_{speed} = 1 - \eta_s g (1 - \omega_{|U|})$  с  $\omega_{|U|} = \exp(-\Delta |U|_{ij}^2 / s_U^2)$  и множитель завихренности  $f_{curl} = 1 - \eta_c g (1 - \omega_{curl})$  с  $\omega_{curl} = \exp(-\Delta |\nabla \times U|_{ij}^2 / s_{curl}^2)$ .

Здесь  $g = \sqrt{g_i g_j}$  – среднее геометрическое ограничения по скорости  $g_i = \min(|U_i| / U_{0,5}, 1)$ , обнуляющего влияние множителей скорости в области слабого течения ( $U_{0,5}$  – медиана  $|U|$ ). Каждый

множитель ограничен в диапазоне  $[1 - \eta, 1]$ , что обеспечивает мягкое мультипликативное управление формой зон.

Результат представлен на рис. 3. Внутризонный разброс температуры составляет  $\sigma_T \approx 1,8$  К, что сравнимо с чисто температурным разбиением, однако в отличие от последнего зоны не фрагментируются и вытягиваются вдоль линий тока, сохраняя структуру течения.

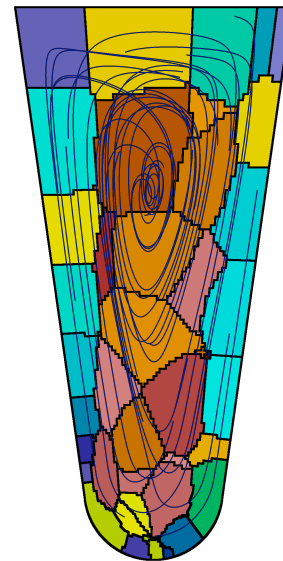


Рис. 3. Кластеризация с составными весами (заливка) и линии тока (синими линиями), наложенные друг на друга

В марковской модели переноса [1] переходные вероятности между зонами определяются через объёмные потоки через общие границы. Это предполагает, что частота пересечения частицами межзонной границы пропорциональна расходу через неё. Для проверки данного допущения проведён численный эксперимент:  $5 \times 10^4$  частиц трассировались вдоль поля скорости (метод Эйлера, 100 шагов,  $\Delta t = 10^{-2}$  с), после чего для каждой пары зон подсчитывалось количество переходов. Коэффициент корреляции Пирсона между частотой переходов и объёмным потоком через соответствующую границу составил  $r = 0,77-0,80$  (Спирмен –  $\rho = 0,94-0,95$ ) для всех рассмотренных вариантов разбиения, что подтверждает пропорциональность и, следовательно, адекватность потоковой модели для описания переноса. При этом коэффициент Пирсона становится ближе к числу 0.80 при использовании именно коэффициентов весов с учётом направления скорости, хотя это скорее связано с изменением топологией границ между кластерами.

Полученные результаты показывают, что спектральная кластеризация с составной весовой функцией позволяет получать зоны, сопряжённые с линиями тока и с минимальным осреднением физических полей. Вариант с пространственными весами обеспечивает компактные равновеликие зоны, но даёт наибольший разброс температуры ( $\sigma_T \approx 2,4$  К). Температурные веса минимизируют осреднение ( $\sigma_T \approx 1,7$  К), но разрушают структуру течения, создавая несвязные фрагменты. Предложенная составная функция достигает компромисса: разброс  $\sigma_T \approx 1,8$  К при сохранении структуры течения. Результаты трассировки подтверждают, что при конвективном характере движения вероятность пересечения границ зон высока независимо от способа разбиения, что обосновывает применение

зональных моделей с последующим описанием переходов на основе потоков через смежные грани.

### Список литературы

- [1] Durlofsky L.J. Upscaling of geocellular models for reservoir simulation: A review of recent progress // Proc. 7th International Forum on Reservoir Simulation. 2003. P. 1–60.
- [2] Von Luxburg U. A tutorial on spectral clustering // Statistics and Computing. 2007. Vol. 17, No. 4. P. 395–416.
- [3] Shi J., Malik J. Normalized cuts and image segmentation // IEEE Trans. PAMI. 2000. Vol. 22, No. 8. P. 888–905.
- [4] Knyazev A.V. Toward the optimal preconditioned eigensolver: Locally optimal block preconditioned conjugate gradient method // SIAM J. Sci. Comput. 2001. Vol. 23, No. 2. P. 517–541.
- [5] Ruge J.W., Stüben K. Algebraic multigrid // Multigrid Methods. SIAM, 1987. P. 73–130.

## Колебания сверхтекучего гелия в каналах различной геометрии: сравнение экспериментальных данных

Пузина Ю.Ю., Корняков И.А., Тарасенко В.Д.

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Визуализация динамики границы раздела фаз пар – жидкость и последующая обработка данных представляет собой специализированную задачу техники эксперимента [1]. При изучении процессов в сверхтекучем гелии появляется дополнительная сложность, связанная с необходимостью теплоизоляции исследуемого объема от окружающей среды.

Общая схема экспериментальной установки для исследования процессов тепло- и массообмена в сверхтекучем гелии, подготовка и методика заправки подробно представлены в [2]. Экспериментальный стенд включает в себя системы криостатирования и вакуумной откачки, систему оптического наблюдения и цифровой видеозаписи, систему подачи тепловой нагрузки, измерения давления пара в криостате.

Рассматриваются два варианта экспериментальной ячейки (рис. 1): прямой вертикальный канал (длина 105 мм, внутренний диаметр 14 мм) и U-образный канал (прямой участок 90 мм, внутренний диаметр 16 мм). Описание экспериментальной ячейки и последовательность выполнения эксперимента для прямого вертикального канала (рис. 1а) описана в [3], для U-образного канала (рис. 1б) представлена в [4]. Оба канала выполнены в виде прозрачной стеклянной трубки выбранной геометрии. Конструкция герметизирующей пробки и нагревателя одинаковая для экспериментальных образцов: внутри конического образца запрессован нагреватель в виде спирали из нихромовой проволоки на керамической подложке, а провода выводятся через отверстие внутри втулки (все соединения дополнительно обрабатываются герметизирующим клеем). Нагреватель закрывается плоской круглой медной пластиной, обращенной вниз. Вся конструкция на штоке располагается внутри криостата так, что при заливке гелия нагреватель располагается в верхней части канала и при этом оказывается на определенной глубине ниже

свободной поверхности жидкости, над которой с помощью вакуумной системы поддерживается постоянное давление (измеряется в автоматическом режиме датчиком Baratron). Таким образом, до начала эксперимента внутренняя часть канала полностью заполнена сверхтекучим гелием.



Рис. 1. Экспериментальные образцы а) прямой вертикальный канал; б) U-образный канал

Результаты экспериментов на качественном уровне выглядят схожим образом. При подаче тепловой нагрузки  $q_w$  больше определённой величины [2] в канале вблизи нагревателя образуется пар. Межфазная поверхность пар – сверхтекучий гелий начинает двигаться вниз с ускорением, объем пара увеличивается. Затем происходит замедление движения границы раздела фаз, остановка и объем пара начинает сокращаться, межфазная поверхность двигается к нагревателю и ударяется в него, что сопровождается характерным звуковым эффектом. Процесс повторяется, в результате чего реализуются постоянные

колебания границы раздела фаз пар – сверхтекучий гелий.

На основании видеозаписи эксперимента, анализа показаний датчика давления, таблиц данных, записанных с АЦП, и других параметров проводится обработка каждой экспериментальной серии. После выборки необходимых серий, в которых на протяжении длительного времени происходят колебания, производится обработка изображения и определение для каждого кадра положения межфазной поверхности, строятся характерные зависимости  $\chi(t)$ . Положение нагревателя определяется до момента подачи тепловой нагрузки. За ноль принимается момент подачи напряжения на источник питания, в это время достигается минимальное давление (и соответствующая ему по линии насыщения температура жидкости) в криостате. Масштабом для перевода ли-

значения давления, амплитуды и частота определяются в интервале времени в 10 с на основании зависимостей  $\chi(t)$ .

Необходимо отметить непрерывное повышение давления в процессе экспериментальной серии. По достижении давлением пара в криостате величины 4900 Па фактически колебания прекращаются, хотя строго  $\lambda$ -переходу соответствует 5050 Па, однако следует учитывать гидростатическую разность, которая при располагаемых глубинах погружения (60 – 185 мм) как раз и приводит к переходу от сверхтекучего состояния в обычный гелий-I. На этом этапе межфазная поверхность останавливается на некотором расстоянии от нагревателя.

Типичные зависимости частоты  $n$  и амплитуды  $A$  колебаний от давления в криостате для прямого вертикального канала показаны на рис. 2 [5] (выборка из экспериментальных данных). При

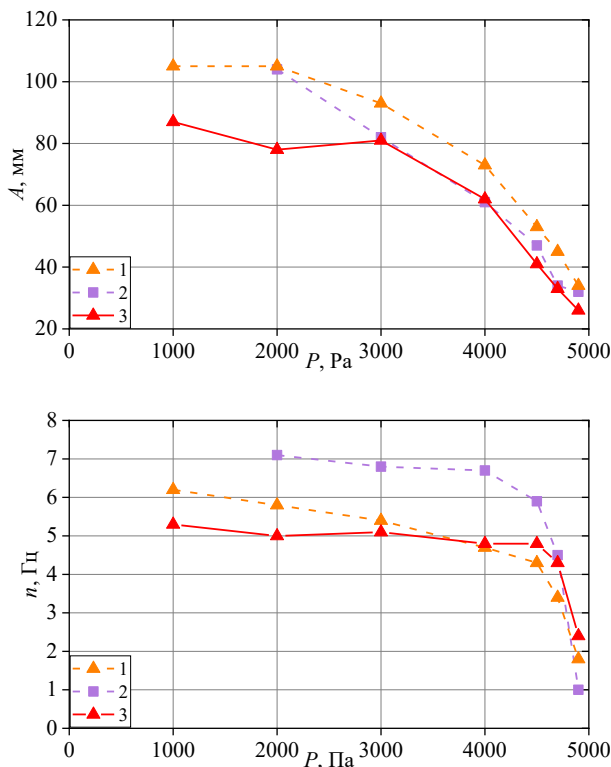


Рис. 2. Зависимости для прямого вертикального канала а) амплитуды  $A$  и б) частоты  $n$  от давления в криостате  $P$ : 1 –  $q_w = 13,9$  кВт/м<sup>2</sup>,  $h = 82$  мм; 2 –  $q_w = 11,7$  кВт/м<sup>2</sup>,  $h = 167$  мм; 3 –  $q_w = 7,8$  кВт/м<sup>2</sup>,  $h = 61$  мм.

нейного размера на цифровом изображении из пикселей в мм выступает держатель трубки высотой 10 мм (рис. 16 на правом колене). Средние

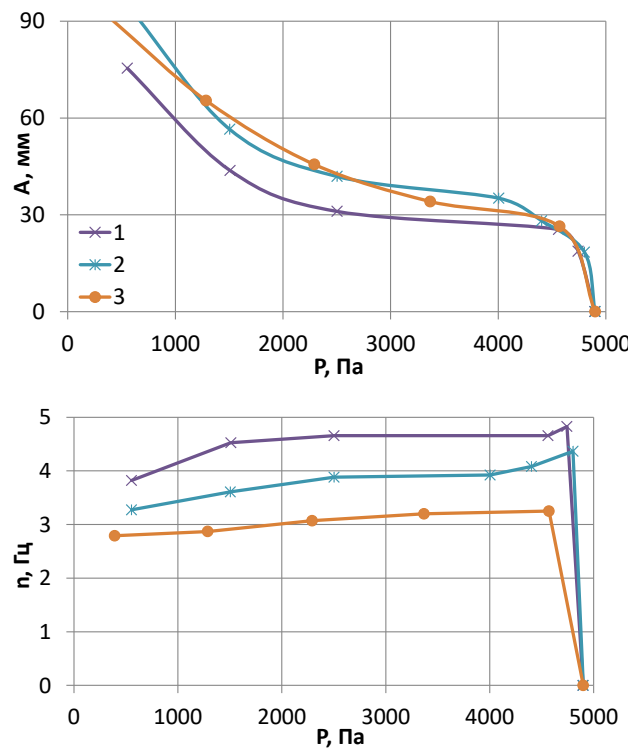


Рис. 3. Зависимости для U-образного канала а) амплитуды  $A$  и б) частоты  $n$  от давления в криостате  $P$ : 1 –  $q_w = 14,6$  кВт/м<sup>2</sup>,  $h = 185$  мм; 2 –  $q_w = 14,2$  кВт/м<sup>2</sup>,  $h = 122$  мм; 3 –  $q_w = 11,0$  кВт/м<sup>2</sup>,  $h = 60$  мм.

повышении давления и равновесной ему температуры жидкости в криостате амплитуда колебаний монотонно убывает от полной длины канала

(максимальная величина) до нулевого значения. При этом частота остается практически постоянной на уровне 5–7 Гц, незначительно уменьшаясь, с прекращением колебаний вблизи 5000 Па. Влияние глубины погружения нагревателя и тепловой нагрузки явным образом не прослеживается.

Типичные зависимости частоты  $n$  и амплитуды  $A$  колебаний от давления в криостате для U-образного канала показаны на рис. 3 [3] (выборка из экспериментальных данных). Амплитуда колебаний с повышением давления монотонно убывает, причем в начальный момент времени её значения превышают видимое пространство канала. Частота колебаний (3–5 Гц) на протяжении экспериментальной серии монотонно, но незначительно увеличивается при снижении амплитуды колебаний, до тех пор, пока достаточно быстро (буквально за несколько колебаний) межфазная поверхность перестает двигаться в колене U-образного канала. Соответствующие нулевые значения частоты и амплитуды показаны на рис. 3. при давлении около 5000 Па. По графикам также видно, что частота колебаний при данном давлении зависит главным образом от глубины погружения, а влияние тепловой нагрузки не обнаруживается.

При проведении экспериментов в рассматриваемой геометрии, но с нагревателем, расположенном внизу канала (перевернутый вариант), никаких колебаний межфазной поверхности не обнаруживается, происходит испарение со свободной поверхности жидкости разной интенсивности или пленочное кипение в зависимости от величины теплового потока на нагревателе [6].

Подведем итоги сравнения процессов в каналах различной геометрии (табл.1). На качественном уровне процессы развиваются в целом одинаково, реализуются колебания границы раздела фаз пар – сверхтекучий гелий, амплитуды колебаний определяются геометрическими особенностями каналов, частоты находятся в пределах одного порядка величин. Количественно характер зависимостей амплитуды и частоты при различных параметрах отличается, особенно это заметно для частоты колебаний. Для амплитуды меняется кривизна кривой. При этом в одном случае обнаруживается влияние параметров экспериментов, а в другом нет. Переход через  $\lambda$ -точку нивелирует отличия, колебания прекращаются.

Таблица 1. Сравнение данных экспериментов для различной геометрии каналов

	Прямой	U-образный
Тепловой поток с нагревателя меньше пикового: $q_w < q_p$	Отсутствие пара вблизи поверхности нагревателя	
Тепловой поток с нагревателя больше пикового: $q_w > q_p$	Образование пара вблизи нагревателя, колебания межфазной поверхности пар – сверхтекучий гелий с постоянными амплитудой и частотой при фиксированных параметрах эксперимента	
Амплитуда	Монотонно убывает с увеличением температуры жидкости	
Частота	Монотонно убывает	Монотонно возрастает до определенной величины
Влияние глубины погружения	Не обнаружено	Обнаружено
Влияние теплового потока	Не обнаружено	
Переход через $\lambda$ -точку	Прекращение колебаний, формирование толстой паровой пленки	

Список литературы

- [1] Бошра Д., Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Формирование всплывающего вихря при слиянии капли этанола с водой в интрузивном режиме. // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2024. Т. 25. № 2. С. 64–78.
- [2] Puzina Yu.Yu., Kryukov A.P. Recovery heat flux at superfluid helium boiling in a U-shape channel with a porous backfill. // Cryogenics, 2024, V. 141, 103864.
- [3] Korniyakov I.A., Puzina Yu. Yu. The oscillations of the vapor – superfluid helium interfacial surface in the vertical channel. // Cryogenics, 2026. V. 157, 104328.
- [4] Пузина Ю.Ю., Крюков А.П. Движение межфазной поверхности гелий II – пар в U-образном канале. // Теплофизика и аэромеханика, 2023. Т. 30, №4, С. 751–762.
- [5] Пузина Ю.Ю., Крюков А.П. Сравнение колебаний границы раздела фаз гелий-II – пар в U-образном канале с монодисперсной засыпкой и без неё. // Инженерно-физический журнал, 2024. Т. 97, №7, С. 1727–1733.
- [6] Корняков И.А., Пузина Ю.Ю. Особенности кипения сверхтекучего гелия как криоагента на плоском нагревателе внутри вертикального канала. // Вестник Дагестанского технического университета. Технические науки, 2025. Т. 52, №3. С. 6–19.

## Краевые задачи для одного класса эллиптических систем первого порядка с сильными особенностями в младших коэффициентах

Расулов А.Б.

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, Российская Федерация

Хорошо известно, насколько важную роль в приложениях играет теория обобщенных аналитических функций, созданная И.Н. Векуа [1]. Она имеет глубокие связи со многими разделами анализа, геометрии и механики, включая квазиконформные отображения, теорию поверхностей, теорию оболочек и газовую динамику.

Многие результаты исследований обобщенных аналитических функций, полученные в скалярном случае, были обобщены на системы с несколькими неизвестными функциями в случае регулярных коэффициентов (см., например, [2]-[4]).

Системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с несколькими неизвестными функциями, коэффициенты младших порядков которых имеют полярные особенности, исследованы недостаточно.

В настоящей работе для одного класса эллиптических систем первого порядка с сильными особенностями в младших коэффициентах найдены явные интегральные представления, которые позволяют исследовать различного рода граничные задачи.

Пусть конечная область  $D$  содержит начало координат и ограничена гладким контуром  $\Gamma$  класса  $C^{1,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  и в дальнейшем  $D_0 = D \setminus \{0\}$ .

В области  $D_0$ , в обозначении  $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ , рассматривается система уравнений :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho} - a_0\right)u + Au + \frac{1}{\rho}B\bar{u} = F, \quad (1)$$

где  $a$  — комплексное число и функция  $a_0 \in L^p(D)$ ,  $p > 2$  — скалярные величины, и для краткости через  $\rho(z)$  обозначено :

$$\rho(z) = \bar{z}|z|^{n-1}, \quad n > 1. \quad (2)$$

Также в (1)  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  — искомая,  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  — известная вектор-функция.

Относительно обратимых матриц  $A \equiv A_{n \times n}$  и  $B \equiv B_{n \times n}$  система (1) изучается в двух случаях: 1) когда все элементы этих заданных матриц — комплексные числа, 2) когда все элементы этих заданных матриц — аналитические функции комплексного переменного  $z$ .

Вектор-функцию  $u(z) \in W_{loc}^{1,p}(D_0)$ , где  $p > 2$ , удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду, называем его *регулярным* решением.

Введем оператор Помпейю–Векуа [1]

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\varphi(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z},$$

где  $d_2\zeta$  означает элемент площади. Хорошо известно, что при  $p > 2$  этот оператор действует  $L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D) \subseteq H(\bar{D})$ .

Рассмотрим уравнение

$$\partial_{\bar{z}}\Omega = \frac{a}{\rho} + a_0(z), \quad \text{где } \rho(z) = \bar{z}|z|^{n-1}, \quad n > 1. \quad (3)$$

При  $n > 1$  в обозначении

$$\omega(z) = \frac{2}{(n-1)|z|^{n-1}}, \quad z \neq 0$$

справедлива

**Лемма 1.** Пусть  $n > 1$  и  $a_0 \in L^p(G)$ ,  $p > 2$ . Тогда функция  $\Omega(z)$ ,  $z \neq 0$ , существует и представима в виде

$$\Omega(z) = -a\omega(z) + h(z), \quad z \neq 0, \quad (4)$$

и удовлетворяет уравнению (3), где  $h(z) \in H(\bar{D})$  и определяется равенством

$$h(z) = (Ta_0)(z) + \frac{a}{(n-1)\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{n-1}(\zeta - z)}.$$

Функция  $\Omega(z)$  вблизи особой точки  $z = 0$  имеет поведение

$$\Omega(z) = O(|z|^{1-n}) \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Пусть существует матрица  $P(z)$  :

$$\Lambda(z) = P(z)A(z)P^{-1}(z), \quad \Lambda(z) = \text{diag}(\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)).$$

Имеет место

**Теорема 1.** Пусть в системе уравнений (1)  $a \in \mathbb{C}$  — число и функция  $a_0 \in L^p(D)$ ,  $p > 2$  — скалярные величины, и  $\rho(z)$  определено в (2). Элементы обратной матрицы  $A(z)$  аналитичны в области  $D$ , непрерывны в  $\bar{D}$  и  $B$  — нулевая матрица.

Тогда:

1. При  $\text{Re} a < 0$  и функция  $a_0(z) \in L^p(D)$  и  $e^{-\Omega} F \in L^p(D)$ ,  $p > 2$ , любое регулярное решение уравнения (1) из класса  $W_{loc}^{1,p}(D_0)$ ,  $p > 2$ , в области  $D_0$  с разрезом, соединяющим точку  $z = 0$  с бесконечно удаленной точкой  $z = \infty$ , дается формулой

$$u(z) = e^{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n p_{kj}(z) e^{-\lambda_j(z)} \bar{z} \phi_j(z) \right) + e^{\Omega} \left( T_D \left( \tilde{f}_j e^{\lambda_j \bar{\zeta} - \Omega(\zeta)} \right) (z) \right), \quad (5)$$

где  $\phi_j(z)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , — произвольные аналитические функции,  $p_{kj}(z)$  — элементы матрицы перехода,  $h(z)$  определено в (4), а  $\tilde{f}_j$  — компоненты вектора  $P e^{-\Omega} F$ .

2. Если  $\text{Re} a > 0$ , то неоднородная система уравнений (1) неразрешима, а решение однородной системы представимо в виде

$$u(z) = e^{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n p_{kj}(z) e^{-\lambda_j(z)} \bar{z} \phi_j(z) \right),$$

где  $\phi_j(z)$ ,  $j = \overline{1, n}$  — произвольные аналитические функции,  $p_{kj}(z)$  — элементы матрицы перехода,  $h(z)$  определяется согласно формуле (4).

3. **Существование непрерывного решения.** Если  $\text{Re} a > 0$ , то единственное решение, непрерывное в точке  $z = 0$  и обращающееся там в нуль (при  $\Phi(0) = 0$  и  $F(0) = 0$ ), определяется выбором аналитического вектора  $\Phi(z) = \{\phi_1(z), \phi_2(z), \dots, \phi_n(z)\}$  из класса непрерывных функций в области  $D$ , т.е.  $\Phi(z) \in C(\bar{D})$ .

При интегральном представлении (5) системы уравнений (1) корректно поставлена

**Задача R** (задача типа Римана–Гильберта): Найти решение  $u(z) \in H(\bar{D})$  уравнения (1), удовлетворяющее на контуре  $\Gamma$  граничному условию

$$\text{Re}(\alpha + i\beta) e^{-\Omega} u_k(t) = g_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in \Gamma, \quad (6)$$

которое ограничено:

$$u = O(1) \quad \text{при } z \rightarrow 0;$$

$g_k(t) \in C^{1,\nu}(\Gamma)$ ,  $0 < \nu < 1$ ,  $k = \overline{1, n}$  — заданные функции.

Переходим к случаю  $B \neq 0$ .

**Лемма 2.** Пусть в уравнении

$$\bar{z} |z|^{n-1} \partial_{\bar{z}} w - \lambda \bar{w} = f, \quad n > 1 \quad (7)$$

где  $r^2 = z \bar{z}$ ,  $w = w(z)$  — искомая комплексная функция,  $\lambda$  — комплексная константа, и пусть

$$\theta = \frac{2|\lambda|}{n-1} r^{1-n},$$

Тогда функция

$$w_0(z) = \phi(z) \text{ch } \theta + \frac{\lambda}{|\lambda|} \overline{\phi(z)} \text{sh } \theta,$$

где  $\phi(z)$ -произвольная аналитическая функция комплексного переменного  $z$ , является одним из решений однородного уравнения (7).

Решение неоднородного уравнения (7) выражается формулой

$$w(z) = w_0(z) + w_p(z),$$

где частное решение  $w_p$  представимо в виде

$$w_p = \text{ch } \theta \int \frac{f_0}{\bar{z} r^{n-1}} d\bar{z} + \frac{\lambda}{|\lambda|} \text{sh } \theta \left( \int \frac{f_0}{\bar{z} r^{n-1}} d\bar{z} \right),$$

при  $f_0 = f \text{ch } \theta - \frac{a}{|q|} \bar{f} \text{sh } \theta$ .

Решение уравнения (1) также найдено через функции Бесселя  $I_\nu(\theta)$ ,  $K_\nu(\theta)$  и справедлива

**Лемма 3.** Пусть  $n > 1$  и  $\lambda = |\lambda| e^{i\alpha}$ . Тогда решение уравнения (7) также представимо в виде

$$w(r, \varphi) = r^{\frac{1-n}{2}} \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ (A_k I_\nu + B_k K_\nu) e^{ik\varphi} - e^{i(\alpha-k\varphi)} (\bar{A}_k I_{\nu-1} + \bar{B}_k K_{\nu-1}) \right]$$

где параметры  $\rho, \nu$  определены как:

$$\theta = \frac{2|q|}{n-1} r^{1-n}, \quad \nu = \frac{k}{n-1} + \frac{1}{2}$$

и коэффициенты ряда удовлетворяют следующим условиям симметрии

$$A_k = -e^{i\alpha} \bar{A}_{-k},$$

$$B_k = e^{i\alpha} \bar{B}_{-k}.$$

На основе лемм 1,2,3 также построено явное решение системы уравнений (1) и исследованы краевые задачи.

**Ключевые слова:** система уравнений Коши–Римана, сильные особенности в коэффициентах, оператор Помпейю–Векуа, жордановая матрица, задача Дирихле, задача типа Римана–Гильберта

### Список литературы

- [1] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981. 448 с.
- [2] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. -М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
- [3] Солдатов А.П. Сингулярные интегро-функциональные операторы на кусочно-гладкой кривой. – Новосибирск: Наука, 2024. – 296 с.
- [4] Виноградов В.С. Краевая задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости// Дифф. уравнения. 1971. 7, N 8. С.1440–1448.

## О корректности первой граничной задачи для уравнений смешанного типа с келдышевским вырождением

Сабитов К.Б.<sup>\*,\*\*</sup>

\*Институт механики им.Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Стерлитамакский филиал УУНиТ, Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\begin{aligned} \mathbb{L}u &= (\text{sign } y)|y|^m u_{yy} + u_{xx} - bu = \\ &= F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y), & y > 0, \\ F_2(x, y), & y < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m = \text{const} > 0$ ,  $b = \text{const}$ , в области  $D = \{(x, y) | 0 < x < \ell, -\alpha < y < \beta\}$ , где  $\ell, \alpha$  и  $\beta$  – заданные положительные числа и исследуем на корректность постановку первой граничной задачи.

Отметим, что уравнение (1) на линии  $y = 0$  вырождается, как в работе Келдыша М.В. [1].

**Задача 1 (Задача Дирихле).** Пусть  $0 < m < 1$ . Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (2)$$

$$\mathbb{L}u(x, y) \equiv F(x, y), \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u(0, y) = u(\ell, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (5)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (6)$$

где  $F(x, y)$ ,  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – заданные достаточно гладкие функции, при этом  $\varphi(0) = \varphi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ ,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ .

**Задача 2 (Задача Келдыша).** Пусть  $1 \leq m < 2$ . Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям (2) – (5).

В этой задаче на отрезке  $y = -\alpha, 0 \leq x \leq \ell$  условие (6) уже не задается.

**Задача 3.** Пусть  $1 \leq m < 2$ . Найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям (3) – (6) и

$$u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0+0} y^{-m-1} u_y(x, y) &= \\ &= \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{-m-1} u_y(x, y), \end{aligned} \quad (8)$$

$$0 < x < \ell, \quad 1 < m < 2;$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \frac{u_y(x, y)}{\ln y} = - \lim_{y \rightarrow 0-0} \frac{u_y(x, y)}{\ln(-y)}, \quad m = 1. \quad (9)$$

При  $m \geq 2$  аналоги приведенных задач 1 – 3 поставлены некорректно.

Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возник после известной работы Франкля Ф.И. [2], где впервые было показано, что задача перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые волны прижимаются к стенкам сопла вблизи минимального сечения.

В нашей работе [3] был предложен спектральный метод обоснования корректности постановки задачи (2) – (6) для уравнения (1) при  $m < 0$  и  $F(x, y) \equiv 0$ .

Показано, что корректность постановки первой граничной задачи существенным образом зависит от показателя степени вырождения и отношения сторон прямоугольника из гиперболической части смешанной области. Установлен критерий единственности решения задачи 1. Это решение построено в виде суммы ряда Фурье. При обосновании равномерной сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей. В связи с чем установлены оценки малых знаменателей об отдаленности от нуля с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили доказать сходимость ряда в классе регулярных решений данного уравнения. Доказаны оценки об устойчивости решения от заданных граничных функций и правой части. Аналогично изучены задачи 2 и 3.

### Список литературы

- [1] Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа // ДАН. 1951. Т.77. №2. С. 181 – 183.
- [2] Ф.И.Франкль. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.
- [3] К.Б. Сабитов. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007. Т. 413. №1. С. 23 – 26.

## Точное решение интегрируемой гидродинамической модели с линейным полем скоростей

Самохин Б.А.\* , Юлмухаметова Ю.В.\*\*

\*Уфимский университет науки и технологий, Уфа

\*\*Институт механики УФИЦ РАН, Уфа

Изучение точных решений уравнений гидродинамики играет важную роль в развитии как фундаментальной, так и прикладной науки. Гидродинамические модели лежат в основе описания множества природных и технических процессов – от атмосферной и океанической динамики до задач аэродинамики, плазменной физики и гидродинамики сверхплотных сред.

Особый интерес представляют интегрируемые модели, обладающие богатой математической структурой. В таких моделях возможно строгое аналитическое исследование, позволяющее получить точные выражения для всех динамических переменных. Одним из примеров таких систем является модель гидродинамики с линейным полем скоростей [1]. Благодаря специальной форме зависимости скорости от координат, эта модель допускает сведение исходных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что делает её доступной для глубокой теоретической проработки.

Целью настоящей работы является исследование точного решения интегрируемой модели гидродинамики с линейным полем скоростей [2], а также изучение эволюции выделенного объёма газа вблизи момента коллапса.

Рассматриваются уравнения идеальной газовой динамики (УГД) [3]

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0, \quad \frac{dp}{dt} + \rho a^2(p, \rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

где  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u, v, w)$  – вектор скорости,  $t$  – время,  $\rho(t, \mathbf{x})$  – плотность,  $p(t, \mathbf{x})$  – давление,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  – оператор полного дифференцирования. Скорость звука  $a(p, \rho)$  вычисляется по уравнению состояния  $p = f(\rho, S)$  ( $S$  – энтропия) по формуле  $a^2 = f'_\rho(p, S)$ .

В рассматриваемой модели решение разыскивается в виде линейного поля скоростей, то есть поле скорости  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  представляется в виде

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(t),$$

где  $A(t)$  – матрица, а  $\mathbf{u}_0(t)$  – вектор сдвига. Для всех подалгебр из оптимальных систем, у которых инвари-

антное решение представляется в виде линейного поля скоростей, выполняется матричное дифференциальное уравнение

$$A' + A^2 = 0.$$

Также предполагается, что  $\operatorname{tr}(A) \neq 0$  – след матрицы не обращается в ноль, что гарантирует наличие сжатия или расширения газа.

Решение матричного дифференциального уравнения для матрицы  $A$  с начальными данными  $A(0) = M_0$  удобно искать в виде  $A(t) = M' M^{-1}$ , где  $M(t)$  – невырожденная матрица. Тогда матрица  $A(t)$  имеет вид  $A(t) = M_0(M_0 t + E)^{-1}$ , где  $E$  – единичная матрица. Всего возможно 4 случая вида матрицы  $A$  [2]. Случай 1 рассмотрен в [5] и задает движение частиц газа, коллапсирующих в двух взаимно перпендикулярных плоскостях в различные моменты времени. В данной работе разобран случай 3. В этом случае матрица начальных данных представляет собой жорданову клетку размером  $3 \times 3$ .

При таком рассмотрении решение УГД описывается формулами

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda x}{\lambda t + 1} \\ \frac{x}{(\lambda t + 1)^2} + \frac{\lambda y}{\lambda t + 1} \\ -\frac{xt}{(\lambda t + 1)^3} + \frac{y}{(\lambda t + 1)^2} + \frac{\lambda z}{\lambda t + 1} \end{pmatrix},$$

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \Pi(t)^{-1} F(\mathbf{I}), \quad K(p) = p_0 \Pi(t)^{-1}$$

с уравнением состояния с разделенной плотностью

$$B(S)K(p) = \rho,$$

где  $B(S)$  – произвольная функция от энтропии,  $p_0$  – произвольная постоянная,  $F(\mathbf{I})$  – произвольная гладкая функция,  $\mathbf{I} = (M_0 t + E)^{-1} M_0 \mathbf{x}$ ,  $\Pi(t) = \det(M_0 t + E)$ ,  $\lambda$  – собственные числа матрицы начальных данных.

Частицы газа, обладающие таким решением, движутся по прямым линиям, описываемые уравнениями

$$x(t) = (1 + \lambda t) C_1, \quad y(t) = (1 + \lambda t) C_2 - \frac{C_1}{\lambda},$$

$$z(t) = (1 + \lambda t) C_3 - \frac{C_2 \lambda - C_1}{\lambda^2}.$$

где  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)$  – постоянные, определяемые начальными координатами частицы  $\mathbf{x}(t_0)$ . Исключая  $t$  из уравнений мировых линий движения частиц, получим уравнение прямой в пространстве. Таким образом, частицы газа движутся по прямым в пространстве со скоростями  $\lambda \mathbf{C}$ . Пример такого движения представлен на Рис.1.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (номер проекта: 124030400064-2; FMRS-2024-0001).*

### Список литературы

- [1] Юлмухаметова Ю. В. Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей // Сибирские электронные математические известия. 2012. № 9. С. 208–226.
- [2] Уразбахтина Л. З. Интегрируемые гидродинамические подмодели с линейным полем скоростей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 135–137.
- [3] Аналитические методы в газовой динамике: лекции / Хабиров С. В. Уфа: БГУ, 2013. с.
- [4] Уразбахтина Л.З., Юлмухаметова Ю.В., Плоский коллапс газа с линейным полем скоростей // Тр. ИММ УрО РАН, Т.29, № 2. 2023. С. 207–216.

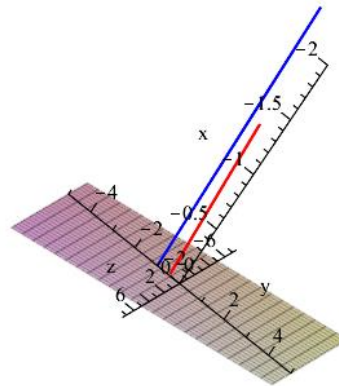


Рис. 1. Траектории движения частиц:  $\mathbf{C} = (1,1,5)$  – длинная прямая,  $\mathbf{C} = (2,1,5)$  – короткая прямая

## О некоторых задачах для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением

Сидоров С.Н.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

Рассмотрим неоднородное уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = F(x, t), \tag{1}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x, t) | 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\},$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - t^n u_t - bu, & t > 0, \\ u_{xx} - (-t)^m u_{tt} - bu, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x, t) = \begin{cases} F_1(x, t), & t > 0, \\ F_2(x, t), & t < 0, \end{cases}$$

$n > 0, m > 0, l > 0, \alpha > 0, \beta > 0$  и  $b$  – заданные действительные числа,  $F_i(x, t), i = 1, 2$ , – известные функции и следующие начально-граничные задачи.

**Задача 1.** Пусть  $0 < n < 1, 0 < m < 1$ . Найдите функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C_x^1(\bar{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} t^n u_t(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0-0} u_t(x, t); \tag{3}$$

$$Lu(x, t) \equiv F(x, t), \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{5}$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{6}$$

где  $\varphi(x)$  – заданная достаточно гладкая функция,  $D_+ = D \cap \{t > 0\}, D_- = D \cap \{t < 0\}$ .

**Задача 2.** Пусть  $0 < n < 1, 1 < m < 2$ . Найдите функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую условиям (2), (4) – (6) и при  $0 \leq x \leq l$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} t^n u_t(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0-0} (-t)^{m-1} u_t(x, t). \tag{7}$$

**Задача 3.** Пусть  $0 < n < 1, m = 1$ . Найдите функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую условиям (2), (4) – (6) и

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} t^n u_t(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0-0} \frac{u_t(x, t)}{\ln(-t)}, \quad 0 \leq x \leq l. \tag{8}$$

Современные научные исследования зачастую направлены на поиск ответов в области теории дифференциальных уравнений в частных производных, особенно в сфере исследований уравнений смешанного типа. Уравнения смешанного параболо-гиперболического типа находят применение в математическом моделировании разнообразных явлений в науке, например, при изучении движения газов или слабосжимаемых жидкостей в каналах, окруженных пористой структурой. Внутри канала давление газа или жидкости подчиняется волновому уравнению, а в пористой среде описывается уравнением фильтрации, которое в данном случае эквивалентно уравнению диффузии (см. работу И.М. Гельфанда [1]). Анализ распределения электромагнитного поля в неоднородных средах, включающих диэлектрики и проводники, приводит к системе, которая состоит из волнового уравнения и уравнения диффузии [2, с. 176]. Кроме того, многие задачи, связанные с теплопередачей в средах с разными характеристиками релаксации, переносом массы в капиллярно-пористых средах, задачи описывающие влияние растительного покрова на теплообменные процессы в почве и приземном воздухе могут быть решены с использованием параболо-гиперболических уравнений. Перечисленные математические модели, используемые в естественных науках, и связанные с ними математические задачи написаны в работах Я.С. Уфлянда [3, 4], О.А. Ладыженской и Л. Ступялиса [5, 6], Л.А. Золиной [7], А.Ф. Чудновского [8], А.Г. Шашкова [9], Х. Азиза и Э. Сеттари [10] А.М. Нахушева [11] и приведены в обзоре диссертации Н.Ю. Капустина [12]. Проведенные до настоящего времени научные исследования по этим проблемам обосновывают актуальность темы настоящей работы.

Отметим, что начально-граничная задача для неоднородного уравнения (1) изучена в нашей работе [13] при  $n = 0$  и  $m < 0, n < 0$  и  $m = 0, n < 0$  и  $m < 0$ , а для однородного уравнения (1), т.е., когда  $F(x, t) \equiv 0$ , задачи 1 – 3 рассмотрены в работе [14].

Для уравнения (1) линия  $t = 0$ , как в работе М.В. Келдыша [15], является характеристикой степенного вырождения уравнения, что затрудняет постановку краевых задач.

В работе получен критерий единственности

решения задач 1 – 3 при различных  $0 < n < 1$  и  $0 < m < 2$ . Их решения построены в явной форме в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Для этих рядов возникает проблема малых знаменателей, которая затрудняет обоснование сходимости. Для доказательства равномерной сходимости построенных рядов найдены оценки, гарантирующие отделимость от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения задач 1 – 3, т.е. решения, удовлетворяющего условиям (2) и (3), (2) и (7), (2) и (8) соответственно. Когда  $n \geq 1$  или  $m \geq 2$  поставленные задачи для уравнения (1) становятся некорректными.

### Список литературы

- [1] Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. 1959. Т. XIV. Вып. 3. С. 3–19.
- [2] Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики (изд. 5-е). М.: Наука, 1977. 736 с.
- [3] Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженер-физ. журн. 1964. Т. 7, № 1. С. 89–92.
- [4] Уфлянд Я.С., Лозановская И.Т. Об одном классе задач математической физики со смешанным спектром собственных значений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 5. С. 1005–1007.
- [5] Ладыженская О.А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестник ЛГУ. Серия мат., мех. и астр. 1965. Т. 19, № 4. С. 38–46.
- [6] Ступялис Л. Начально-краевые задачи для уравнений смешанного типа // Труды МИАН СССР. 1975. Т. XXVII. С. 115–145.
- [7] Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6, № 6. С. 991–1001.
- [8] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
- [9] Шашков А.Г. Системно-структурный анализ процессов теплообмена и его применение. М.: Энергоатомиздат, 1983. 279 с.
- [10] Азиз Х., Сеттари З. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.
- [11] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
- [12] Капустин Н.Ю. Задачи для парабола-гиперболических уравнений и соответствующие спектральные вопросы с параметром в граничных точках. Дисс. ... докт. физ.-матем. наук: 01.01.02 / Капустин Николай Юрьевич, М., МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012. 172 с.
- [13] Sabitov K.B., Sidorov S.N. Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 236, Issue 6. P. 603–640.
- [14] Sidorov S.N. Initial-Boundary Value Problems for an Equation of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type with Characteristic Degeneration // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Vol. 46, No. . P. 3444–3457.
- [15] Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.

## О сравнении методов измерения твердости дисперсных систем

Сказочкин А.В.\* , Усеинов А.С.\*\*

\* ФГБНУ «Научно-исследовательский институт перспективных материалов и технологий», Москва

\*\* ФГБНУ «Институт физики высоких давлений им.Л.Ф. Верещагина РАН», Троицк

Поверхностные слои с микрочастицами, распределенными в матрице металла, представляют собой один из типов многофазных систем, в которых параметры частей (фаз) позволяют управлять твердостью, пластичностью и другими характеристиками слоев. Например, изменяя только некоторые технологические режимы по технологии минеральных покрытий [1], обеспечивающие вхождение микрочастиц минералов в металл, можно получать на образцах из конструкционной стали модифицированные слои различной шероховатости Ra (average roughness), отличающиеся почти на порядок величины [2]. Интерес к модифицированным слоям, обогащенным микрочастицами минералов, обусловлен их перспективами в качестве износостойких и/или антифрикционных покрытий на поверхности пар трения различных металлов - сталей [1], титана [3], алюминия [4], работающих в агрессивной среде - абразиве, морской воде, в присутствии газов, растворов кислот, при термодинамических нагрузках. Исследования показывают, что толщина модифицированного слоя, коэффициент трения, твердость слоев зависят как от состава минеральных смесей, так и от режимов вхождения частиц в металл и свойств модифицируемой металлической поверхности. Огромную роль в таком случае играет количественное определение некоторых трибологических параметров создаваемых модифицированных слоев, в частности, определение такого параметра, как твердость, для сопоставления с макроскопическими свойствами самой детали и оценки практической пользы от создания слоев [5].

Наиболее распространенный метод определения твердости тонких модифицированных слоев – инструментальное индентирование, положенное в основу стандартов ISO 14577 и ГОСТ Р 8.748-2011. Суть метода измерения состоит в процедуре вдавливания трехгранной алмазной пирамиды (пирамидальный индентор Берковича) с регистрацией диаграммы вдавливания и

последующим расчетом твердости по зависимости приложенной силы от внедрения в соответствии со стандартом ISO 14577 [6].

Также для измерения твердости тонких микрослоев используют метод измерения микротвердости по Виккерсу (стандарт ГОСТ Р ИСО 6507-1-2007). Его суть в измерении диагонали образовавшегося отпечатка при внедрении в металл индентора в виде четырехгранной пирамиды (пирамидальный индентор Виккерса). Однако из-за возникающего эффекта упругого восстановления отпечатка при размерах отпечатка менее 10 мкм и ограничением разрешающей способности оптического микроскопа при измерении диагонали отпечатка такого размера, этот метод используется при измерении твердости пленок толщиной не менее 10 мкм [5, 7-8].

Существуют и общие для всех методов проблемы при определении твердости тонких слоев и покрытий, такие как влияние подложки, шероховатость поверхности, наличие остаточных напряжений, которые могут внести в результаты измерений значительную коррекцию [4]. Отличие методов заключается в том, что в методе Виккерса твердость определяется как отношение приложенной нагрузки к площади поверхности восстановленного отпечатка, а в методе инструментального индентирования значение твердости равно отношению максимальной приложенной нагрузки к площади проекции не восстановленного отпечатка [8]. Поэтому, возможны ситуации, при которых отличия в процедурах определения твердости двумя этими методами могут приводить к отличию результатов измерений твердости тонких модифицированных слоев металла, толщиной несколько десятков микрон, что является типичным при модификации микрочастицами металлической поверхности [7].

С одной стороны, метод инструментального индентирования обеспечивает наибольшую из всех существующих методов измерения твердости тонких слоев локальность и прецизионность

измерений [5–8], с другой, твердомер, реализующий метод инструментального индентирования, является сложным лабораторным комплексом, и цена прибора, реализующего этот метод, часто отличается на порядок величины от цены микротвердомера по Виккерсу, что затрудняет его использование при масштабировании технологии.

Цель настоящей работы состоит в исследовании твердости поверхности металла (сталь 20Х13), модифицированной частицами минералов размером единицы микрон, двумя различными методами (инструментального индентирования и измерения микротвердости по Виккерсу) и сравнительный анализ результатов измерений, полученных этими методами.

Два образца из стали 20Х13, диаметром 5 (образец №1) и 8 см (образец №2), толщиной около 1 см, были изготовлены токарной обработкой с последующей стандартной шлифовкой. На поверхности образцов были созданы слои, модифицированные ультрадисперсными частицами смесей минералов по базовой технологии НПО «Геознергетика» [1]. Слои были созданы, используя разные виды минеральных смесей, при одинаковых технологических режимах, что предполагает отличие их твердости друг от друга. Толщина каждого модифицированного слоя, исходя из технологических параметров при его создании и ранее проведенных экспериментов, была не меньше 20 мкм [1, 2]. На образцах были выполнены сравнительные измерения шероховатости поверхности, твердости и модуля упругости (Юнга).

Измерение шероховатости поверхности проводилось на профилометре модель 130 (предприятие-изготовитель ПРОТОН МИЭТ), метод измерения — контактная профилометрия.

1. Микротвердомером DuraScan (EMCO-TEST, Австрия). Параметры процедуры измерения: индентор — четырёхгранная пирамида типа Виккерс, диапазон нагрузок: 0.025 кгс - 0.5 кгс.

2. Нанотвердомером «НаноСкан-3Д» (предприятие-изготовитель ФГБНУ ТИСНУМ). Параметры процедуры измерения: индентор — трёхгранная пирамида типа Берковича, время нагружения — 10 с, время разгрузки — 10 с., время поддержания максимальной нагрузки — 3 с., диапазон нагрузок: 10 мН - 1.05 Н.

Измерение шероховатости проводилось измерением профилей рельефа поверхности образцов: образец №1 -  $Ra=2.03\pm 0.02$  мкм; образец №2 -  $Ra=2.62\pm 0.02$  мкм. Сравнение величин  $Ra$  показывает, что образцы обладают сходной шероховатостью, что вполне прогнозируемо, учитывая постоянство технологических режимов. Для исключения влияния подобной шероховатости необходимо производить индентирование на глубину ~ 100 мкм, что значительно превышает предполагаемую толщину модифицированного слоя (около 20 мкм). Вместе с тем, большой шаг шероховатости ( $S_m \sim 200$  мкм) позволяет найти достаточно ровные участки для расположения индента, что и было сделано при индентировании методом Виккерса.

Перед представлением результатов измерений твердости двумя методами, необходимо отметить, что поверхность после модификации довольно неоднородна из-за того, что процессные операции технологии минеральных покрытий приводят к образованию ровной поверхности (около 90%) и хаотически расположенных микрополостей (около 10%) по всей рабочей поверхности образцов [1]. Но тогда, при проведении микроизмерений, возникает вопрос о месте измерений и корректности полученных параметров для характеристики поверхности. Учитывая состояние поверхности, очевидно, что при проведении измерений необходимо придерживаться двух стратегий измерений:

- выполнение измерений сознательно выбранных участков модифицированной поверхности;

- выполнение измерений на большом количестве мест измерений, выбранных случайным образом, с последующей статистической обработкой полученных результатов.

Индентирование обоими методами необходимо осуществлять именно в ровные участки модифицированной поверхности. С другой стороны, при дальнейшей автоматизации процесса измерения твердости, места индентирования будут выбираться случайным образом, а значит необходимо учитывать наличие микротрещин и микрополостей, которые будут вносить искажения в итоговый результат

*Измерение микротвердости по методу Виккерса*

Для измерения образцов были выбраны нагрузки 0.025 кгс, 0.1 кгс и 0.5 кгс. Результаты измерения по Виккерсу (HV) с различными нагрузками: Образец №1 - 1215±180 (HV) при 0.025 кгс, 1080±225 (HV) при 0.1 кгс, 382±58 (HV) при 0.5 кгс. Образец №2 - 600±120 (HV) при 0.025 кгс, 530±140 (HV) при 0.1 кгс, 320±40 (HV) при 0.5 кгс.

Также было проведено измерение твердости в центре, середине между центром и краями краю образцов. Результаты измерений оказались следующими. Образец №1: 933±90 - Твердость в центре образца (HV); 500±145 - Твердость в середине образца, между центром и краем (HV); 1133±275 - Твердость на краю образца (HV). Образец №2: 563±210 - Твердость в центре образца (HV); 519±50 - Твердость в середине образца, между центром и краем (HV); 732±175 - Твердость на краю образца (HV). Эти результаты показывают качественное отличие величины твердости, измеренное на образцах 1 и 2, и большую неоднородность твердости (больше 100%), измеренную по площади образцов.

*Измерение инструментальной твердости (твердость, определенная методом инструментального индентирования)*

Измерения в режиме наноиндентирования были проведены следующим образом: на каждом из полученных образцов был нанесен массив уколов, с нагрузкой 1.05 Н. Измерения выполнены без предварительного выбора места индентирования и, таким образом, были в значительной степени подвержены влиянию шероховатости и наличию микрополостей. Массив содержал 10x10 точек с расстоянием 300 мкм между точками (общий размер индентируемой поверхности: 3 x 3 мм). Твердость и модуль упругости образцов, определенный при индентировании в ровные участки поверхности с нагрузкой 10 мН: Образец №1 - 14.2 ± 2.1 (Н, ГПа), 268 ± 47 (Е, ГПа); Образец №2 - 9.5 ± 2.2 (Н, ГПа), 260 ± 33 (Е, ГПа).

При обсуждении различий результатов измерений, выполненных разными методами, сделан акцент на источники неопределенности результатов, связанные с физико-механическими свойствами исследуемого материала. В частности, высокая локальность измерений, характерная для метода инструментального индентирования, приводит к тому, что минимальное отклонение мешающих параметров, в частности

шероховатости, ведет к большим значениям погрешности при расчете результатов измерения. Дополнительную разницу в результатах измерений, выполненных двумя методами на малых глубинах индентирования, может вносить то, что исследуемый объект является материалом со сложной структурой. Все изложенное выше приводит к проблемам в определении действительных свойств тонких слоев, модифицированных ультрадисперсными частицами минералов.

Возможный выход из ситуации заключается в переходе от использования мер твердости при калибровке приборов, реализующих метод инструментального индентирования, к стандартным образцам свойств, для которых будет обеспечено постоянство механических свойств в диапазоне глубин индентирования, в котором проводятся измерения. Учитывая отсутствие таких образцов, предпочтительными, при проведении опытно-конструкторских работ, связанных с изменениями технологическими режимов и поиском оптимальных условий являются сравнительные измерения, выполненные одним из методов измерения.

#### Список литературы

- [1] Kislov S.V., Kislov V.G., Skazochkin A.V., Bondarenko G.G., Tikhonov A.N. Effective mineral coatings for hardening the surface of metallic materials. Russian Metallurgy (Metally), 2015, №7, pp. 558 – 564. DOI: 10.1134/S0036029515070095
- [2] Skazochkin A., Bondarenko G., Kislov S. Research of Tribological Features of Steel Surface by Creating Mineral Coatings. Journal of Engineering Science and Technology Review, 2018, 11(6), pp.138-143. DOI:10.25103/jestr.116.17
- [3] Skazochkin A.V., Useinov A.S., Kislov S.V. Surface hardening of titanium alloy by minerals. Letters on Materials, 2018, №8(1), pp. 81-87. DOI: 10.22226/2410-3535-2018-1-81-87
- [4] Skazochkin A.V., Bondarenko G.G., Zukowski P. Research of Surface Wear Resistance of Aluminum Alloy Modified with Minerals using Sclerometry Method. Devices and Methods of Measurements. 2019, vol. 10, no. 3, pp. 263–270. DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-3-263-270
- [5] Torskaya E.V., Mezrin A.M., Morozov A.V., Useinov A.S., Kravchuk K.S., Frolov N.N. Comparative study of tribological behavior of thin coatings based on metal oxides at various scale levels // Journal of Friction and Wear. 2015. Т. 36. № 6. С. 542-547.
- [6] Кравчук К., Усеинов А., Маслеников И., Перфилов С. Автоматизированный контроль параметров композитных изделий с помощью нанотвердомера «НаноСкан» // Наноиндустрия. 2016. № 3 (65). С. 54-59.
- [7] Useinov A., Gogolinskiy K., and Reshetov V. Mutual consistency of hardness testing at micro- and nanometer scales. Int. J. Mater. Res., 2009, vol. 100, pp. 968–972. DOI: 10.3139/146.110138
- [8] Maslennikov I.I., Reshetov V.N., and Useinov A.S. Mapping the Elastic Modulus of a Surface with a NanoScan 3D Scanning Microscope. Instruments and Experimental Techniques, 2015, vol. 58, No. 5, pp. 711–717. DOI: 10.1134/S0020441215040223

## Численное моделирование отбора газа и нефти из купола-сепаратора с помощью системы соосных цилиндрических каналов

Столповский М.В., Насыров А.А.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

Исследование температурных и гидродинамических полей, реализующихся в системах добычи и транспортировки газа или нефти, имеет большое практическое значение. Поскольку большая часть подводных трубопроводов проложена в толще моря с достаточно низкой температурой, то данное обстоятельство может, в некоторых случаях, обеспечивать благоприятные условия для образования и отложения гидратов [1, 2].

Известно, что для быстрой ликвидации разлива нефти и газа при авариях в подводных скважинах могут использоваться купола-сепараторы, в которых накапливаются нефть и газ и потом откачиваются из нее на стоящий на поверхности воды танкер [3, 4]. В этих работах на основе уравнений механики многофазных сред построена математическая модель, описывающая течение газожидкостной смеси в трубе для отвода газа из купола-сепаратора с учетом гидратообразования на внутренних стенках трубы. Было показано, что гидратообразование может привести к закупорке отводящего трубопровода и его интенсивность увеличивается по мере нарастания склеротических отложений в трубе. Предполагается, что из-за сложности осушки газа на дне океана в куполе-сепараторе целесообразно проведение мероприятий по нагреву отводящей трубы или уменьшению отвода тепла от нее для устранения закупорки трубы в процессе отбора газа. В представленной работе, являющейся продолжением [4], представлена математическая модель одновременного отбора углеводородов (газа и нефти) с помощью системы соосных цилиндрических каналов. Исследовано влияние параметров газа и нефти на особенности распределения температуры и давления системы.

Математическая модель исследуемого процесса включает в себя уравнения сохранения масс,

импульса и энергии с учетом теплообмена между газом, нефтью и водой через стенки каналов. Кроме того, модель дополняется соотношениями, описывающими образование слоя гидрата на внутренней поверхности канала, по которому течет газ. На основе численного решения задачи, в частности, показано, что применение соосной системы каналов сдвигает область формирования гидрата вверх по течению, чем в случае отбора газа с помощью лишь одной трубки. Установлено, что основными параметрами, оказывающими влияние на реализацию режимов с образованием и без образования гидрата, являются массовый расход нефти и газа.

*Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ на тему «Новые методы получения полифункциональных органических соединений, обладающих совокупностью ценных свойств (ингибиторы коррозии, антиокислители, ПАВ, пластификаторы и др.), обработка многопараметровых данных натуральных наблюдений мониторинга водных объектов и гидратообразования» (FEUR-2026-0004)».*

### Список литературы

- [1] Li W., Gong J., Lü X., Zhao J., Feng Y., Yu D., 2013. A study of hydrate plug formation in a subsea natural gas pipeline using a novel high-pressure flow loop // *Petroleum Science*. 2013. Vol. 10. P. 97–105.
- [2] Norris B.W.E., Zepa L.E., Koh C.A., Johns M.L., May E.F., Aman Z.M., 2016. Rapid assessments of hydrate blockage risk in oil-continuous flowlines // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 2016. Vol. 30. P. 284–294.
- [3] Уразов Р.Р., Чиглинцев И.А., Насыров А.А. Образование склеротических отложений гидрата в трубе для отбора газа из купола-сепаратора // *Инженерно-физический журнал*. 2017. Т. 90, № 5. С. 1223–1231.
- [4] Чиглинцев И.А., Насыров А.А. Моделирование процесса наполнения «купола-сепаратора», с разложением газогидрата, образовавшегося в период монтажа установки. // *Инженерно-физический журнал*. 2016. Т. 89, № 4. С. 851–860.

## Структура и механические свойства высокопрочного алюминиевого сплава после КВД

Терешкин В.В., Автокротова Е.В., Ситдииков О.Ш., Маркушев М.В.

Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа

С использованием комплекса методов металлографического анализа и оценки механических свойств, изучали структурно-механическое поведение промышленного алюминиевого сплава 1965 (Al-Zn-Mg-Cu-Sc-Zr) в процессе термомеханической обработки (ТМО), основанной на кручении под высоким давлением (КВД). Основная задача исследования заключалась в уточнении «границы» деформационной обработки, за которой эффект интенсивной пластической деформации и наноструктурирования ухудшает параметры конструкционной прочности сплава. Другой задачей было выявление природы поведения сплава и контролирующих структурных факторов.

Образцы диаметром 20 и толщиной 1,5 мм, вырезанные из серийно гомогенизированного слитка были подвергнуты закалке и пластической деформации при комнатной температуре в наковальне Бриджмена всесторонним сжатием под давлением 6 ГПа и кручением от 0,1 до 10 оборотов, а также финальному естественному старению.

В исходном состоянии сплав имел равноосную зеренную структуру (диаметр зерна ~25 мкм) с равномерно распределенными наноразмерными алюминидными переходными металлов (ПМ). По границам зерен располагались крупные избыточные фазы размером ~1,5 мкм и приграничные зоны, свободные от выделений алюминидов.

Установлено, что процессы структурирования и упрочнения/разупрочнения сплава при ТМО имеют явно выраженную стадийность. Так в исходном состоянии закаленный слиток обладал твердостью 120 HV, которая после серийного искусственного старения (обработка T1) повышалась до 185 HV за счет дисперсионного твердения при выделении основных упрочняющих фаз. А применение КВД позволило достичь еще более высоких показателей твердости и статической прочности. По результатам их оценки и аттестации структуры матрицы и вторых фаз были выделены три этапа деформирования сплава. На первом - при осадке заготовки под высоким давлением, имел место максимальный прирост прочности сплава:

твердость увеличилась в полтора раза вследствие увеличения плотности дислокаций на несколько порядков. На втором - при последующем кручении до структура. В ее развитии критическую роль играли наноразмерные алюминиды ПМ, которые препятствовали движению дислокаций и способствовали формированию «плотных дислокационных стенок». С дальнейшим увеличением количества оборотов однородная структура матрицы преимущественно малоугловыми границами трансформировалась в неоднородную нанофрагментированную с высокой долей высокоугловых границ. Несмотря на то, что при этом отмечали дальнейшее упрочнение сплава - его твердость и предел текучести достигали рекордных уровней (240 HV и 1000 МПа), пластичность сплава снижалась. И после 10 оборотов сплав с наноструктурированной матрицей разрушался в упругопластической области при околонулевом удлинении.

Анализ структурного состояния матрицы и вторых фаз позволил заключить, что уникальный баланс механических свойств сплава, включая улучшенный баланс прочности и пластичности, достигался при формировании при ТМО с малыми деформациями (менее 1 оборота) развитой дислокационно-ячеистой структуры. Напротив, формирование нанофрагментированной структуры при больших степенях деформации приводило к деградации и прочности и пластичности сплава из-за катастрофического охрупчивания.

Представлен детальный анализ механизмов наноструктурирования матрицы и роли вторых фаз в формировании механических свойств сплава.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в соответствии с государственным заданием ИПСМ РАН.

## Управление объемной конденсацией в сверхзвуковом сопле при наличии кластеров

Терешкин В.С.<sup>\*\*\*</sup>, Левашов В.Ю.<sup>\*\*</sup>, Сидоров А.А.<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> НИУ «МЭИ», Москва

<sup>\*\*</sup> Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Объемная конденсация как явление вызывает интерес современных исследователей: к настоящему моменту опубликовано достаточно большое число как экспериментальных, так и расчетных работ, в том числе посвященных явлению конденсации в сверхзвуковых потоках.

Внимание исследователей к проблеме связано, во-первых, с необходимостью учёта влияния процессов конденсации на параметры потока в технологических цепочках, а во-вторых, с потребностью получения аэрозоля с заданными свойствами и характеристиками. В последние годы активно развиваются методы декарбонизации на основе сверхзвуковой сепарации газов [1] и получения наноразмерных плёнок [2], физические основы которых опираются на процессы объёмного зарождения (нуклеации) и роста кластеров.

Целью работы является поиск подходов к управлению объемной конденсацией в сверхзвуковом сопле Лавая при помощи термически равновесных наноразмерных кластеров, находящихся в паре.

Классическим подходом к учёту процессов конденсации в потоках парогазовых смесей является континуальный расчёт, дополняемый кинетическими моделями [3], в основе которых может лежать как классическая теория нуклеации [4], так и её различные модификации [5]. Такой подход имеет ряд недостатков, связанных с неприменимостью макроскопических представлений о жидкости к описанию процессов образования наноразмерных зародышей новой фазы, или с ограниченной применимостью таких моделей.

Например, согласно классической теории нуклеации, при степени пересыщения, близкой к единице, размер критического зародыша стремится к бесконечности. А при больших степенях пересыщения критический зародыш может состоять из менее чем десятка атомов.

Альтернативой могут выступать подходы на основе атомистических методов, таких, например, как прямое статистическое моделирование Монте-Карло (DSMC) [6] или методы молекулярно-динамического моделирования (МД) [7].

Неоспоримым преимуществом МД подхода является возможность получения распределения кластеров, а также информации об их структуре и эволюции во времени из первых принципов. Но имеется и существенный недостаток, связанный с

высокими требованиями к вычислительным ресурсам и невозможностью моделирования макроскопических систем.

В настоящей работе рассматривается течение невязкого нетеплопроводного пара аргона в расширяющийся части плоского сопла. Вход в сопло (критическое сечение) имеет размер  $R_1 = 0.1$  м, длина канала -  $L = 0.1$  м. Угол раствора сопла  $\alpha_2 = 12.5^\circ$  (рис. 1).

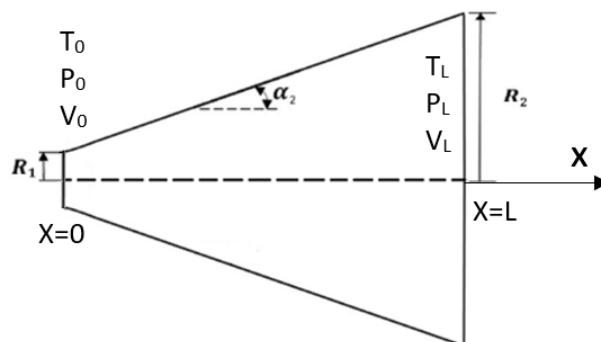


Рис. 1. Схематичное изображение расчетной области

Для получения зависимости параметров пара и конденсационного аэрозоля от расстояния до критического сечения решалась система стационарных газодинамических уравнений (неразрывности, движения, энергии), дополненная уравнениями для вычисления моментов функции распределения капель по размерам  $\Omega_n$ , полученных на основе соответствующего кинетического уравнения [8]:

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f_r + \frac{\partial}{\partial r}(\dot{r} f_r) = \frac{I}{\rho} \delta(r - r_{cr})$$

где  $f_r$  – функция распределения капель по размерам, нормированная на количество капель в единице массы;  $\vec{u}$  – скорость потока смеси, м/с;  $\delta$  – дельта-функция Дирака;  $I$  – скорость нуклеации,  $1/(m^3 \cdot c)$ ;  $\dot{r}$  – скорость роста капель, м/с;  $r_{cr}$  – критический радиус капель, м;  $t$  – время, с;  $\rho$  – плотность смеси,  $kg/m^3$ .

На вход (в критическое сечение) подавался пар с температурой  $T_0 = 120$  К, давлением  $P_0 = 2$  МПа и скоростью  $V_0 = 206$  м/с, равной скорости звука при заданной температуре. Степень пересыщения пара при таких параметрах близка к единице. На выходе из

сопла применялись экстраполирующие граничные условия.

Информация о размере, распределении и форме кластеров во входном сечении сопла была получена из МД моделирования термически равновесного пара модельного аргона [9] при параметрах примерно равных параметрам на входе. Размер расчётной области составлял 120 нм. По всем координатам применялись периодические граничные условия. На рис. 2 видно, что в такой системе существует ненулевое распределение кластеров.

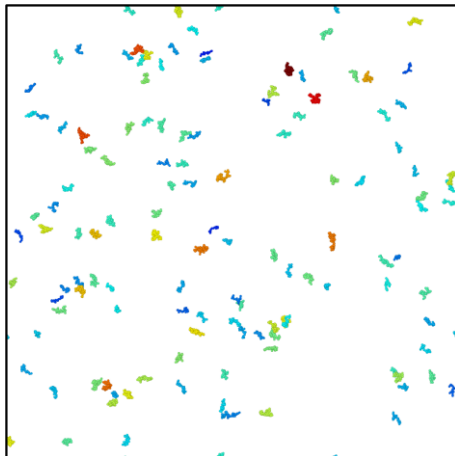


Рис. 2. Снимок МД системы (кластеры, размер которых меньше 30 атомов, не отображены)

Для учёта полученного из МД распределения кластеров на континуальное течение пара в сопле предлагается гибридный подход, суть которого заключается в замене полученных кластеров на сферы с радиусом, равным среднему расстоянию атомов, принадлежащих такому кластеру, до его центра масс и построении на базе этой информации функции распределения кластеров по размерам.

По полученной из МД моделирования функции распределения определялись значения ее моментов:

$$\Omega_n = \int_{r_{cr}}^{\infty} r^n f dr$$

Нулевой момент  $\Omega_0$  показывает числовую плотность капель в единице массы (или объема в зависимости от нормировки), отношение первого момента к нулевому дает средний радиус частиц  $r_d = \Omega_1/\Omega_0$ , второй  $\Omega_2$  и третий  $\Omega_3$  моменты показывают суммарную площадь и объем сконденсировавшихся и растущих капель (частиц).

Полученные таким образом значения моментов функции распределения использовались в качестве начальных данных: на вход в сопло задавалась либо суммарная площадь кластеров на единицу массы ( $\Omega_2$ ), либо вычислялся средний радиус кластера  $r_d$  и варьировалось число кластеров такого размера  $N_d$ .

В ходе численного моделирования получены распределения температуры, давления, числа Маха,

скорости нуклеации, моментов функции распределения, массовой доли конденсата и среднего радиуса частиц вдоль центральной линии сопла. Рассматриваются режимы с учетом наличия в потоке наноразмерных кластеров и без них.

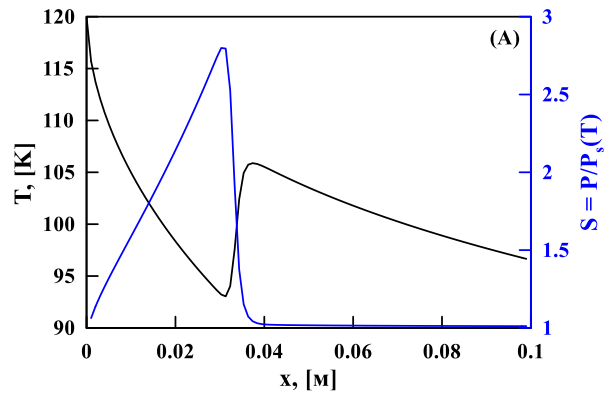


Рис. 3. Распределения температуры и степени пересыщения вдоль центральной линии сопла без учета наноразмерных кластеров в потоке

На рис. 3 представлены результаты моделирования пара в сопле без учёта кластеров в потоке. Результаты подтверждают хорошо известное следствие объемной конденсации в сопле: температура потока растет вследствие тепловыделения в активной фазе процесса, а степень пересыщения снижается.

На рис. 4 показано, как меняется скорость нуклеации вдоль оси сопла без учёта кластеров ( $N_d = 0$ ) и с кластерами. Из рисунка видно, что при учете присутствия в потоке наноразмерных кластеров в количестве  $N_d = 10^6$  ед./кг скорость нуклеации существенно снижается по сравнению со случаем без них, что показывает возможность подавления процесса нуклеации. Массовая доля конденсата увеличивается в этом случае за счет роста уже имеющихся в потоке частиц, а не за счет образования новых, что показано на рис. 5.

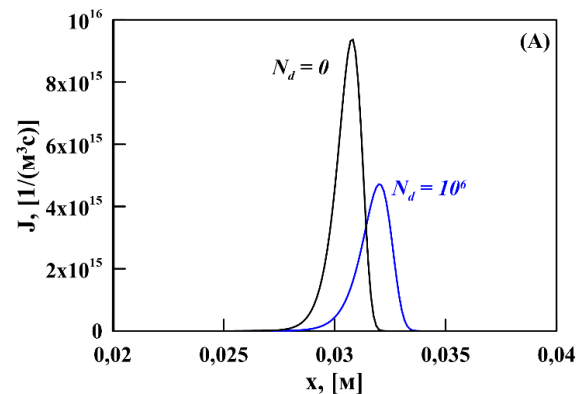


Рис. 4. Распределения скорости нуклеации вдоль центральной линии сопла с учетом различной числовой плотности наноразмерных кластеров в потоке

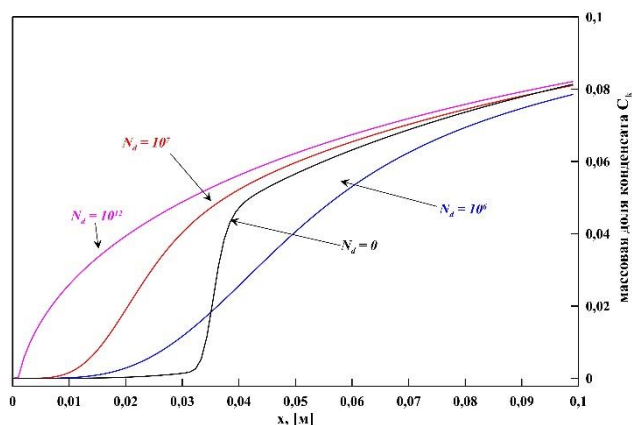


Рис. 5. Распределения массовой доли конденсата вдоль центральной линии сопла с учетом различной числовой плотности наноразмерных кластеров в потоке

Учет наличия наноразмерных кластеров показывает их влияние на термогазодинамику потока и характеристики конденсационного аэрозоля. При этом, принудительная инъекция конденсационных центров (зародышей) может рассматриваться как один из способов управления интенсивностью и локализацией процесса фазового перехода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 24-79-00063).

### Список литературы

- [1] Dingilian K. K. и др. Homogeneous nucleation of carbon dioxide in supersonic nozzles I: experiments and classical theories // Phys. Chem. Chem. Phys. The Royal Society of Chemistry, 2020. Т. 22, № 34. С. 19282–19298.
- [2] Поздняков Г.А., Гареев Т.И. Конденсация в расширяющейся струе высокоэнтальпийной плазмы с образованием наночастиц и нанесение их на поверхность // Известия РАН. Теплофизика и аэромеханика, 2024, № 5, С. 1003 - 1011
- [3] Сидоров А.А., Ястребов А.К. Управление интенсивностью объемной конденсации в холодильной турбинной ступени радиального типа путем изменения начальной температуры // Теплоэнергетика, 2025, №5, С. 59-72.
- [4] V.I. Kalikmanov Nucleation Theory (Springer Netherlands, 2013), p. 17
- [5] D.I. Zhukhovitskii, Size-corrected theory of homogeneous nucleation, J. Chem. Phys. 101 (6) (1994) 5076–5080
- [6] Быков Н.Ю., Горбачев Ю.Е., Ковалев Д.Д., Мизина В.В. Динамика малых кластеров в сверхзвуковой недорасширенной струе // Изв. РАН. МЖГ. 2025. № 6. С. 88-96.
- [7] Левашов В.Ю., Терешкин В.С., Жаховский В.В. Образование кластеров при неравновесном испарении аргона в среду собственного пара в присутствии неконденсируемого компонента // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2026, № 1, С. 17-28
- [8] Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974.
- [9] Zhakhovskii V.V. et al. Shock Wave Structure in Lennard-Jones Crystal via Molecular Dynamics // Phys. Rev. Lett. American Physical Society, 1999. Vol. 83, № 6. P. 1175–1178. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1175

# Численное моделирование динамики одиночной ударной волны малой интенсивности в канале с волокнистым наполнителем

Тукмаков Д.А.

ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Одним из разделов механики жидкости и газа является механика многофазных сред, в которой исследуются течения неоднородных сред, состоящих из нескольких компонент.

Различием таких течений от обыкновенной гидрогазодинамики [1] является задача по учету взаимодействия компонент в течениях сложных сред [2-12].

В монографии [2] изложены теоретические основы механики многофазных сред. В статье [6] с помощью континуальной методики моделирования динамики многофазных сред в «замороженном» приближении исследуется ослабление ударных волн сферической геометрии.

Для математического моделирования динамики неоднородных сред различные методики.

Траекторный подход не учитывает взаимодействия в потоке «сложной среды». Равновесная методика математического моделирования динамики неоднородных сред упрощает моделирование сложных течений до описания течений однородных сред и также не учитывает взаимодействия компонент. Данная методика не позволяет математически исследовать такие процессы, когда в расчетной области одновременно находятся участки с неоднородной и однородной средами или когда концентрация дисперсной компоненты неравномерна.

Математические модели течений неоднородных сред диффузионного типа применяются как правило в случае если компоненты смеси имеют одинаковое агрегатное состояние, так как нет учета межфазного скоростного скольжения и межфазного теплообмена.

Континуальная методика [2-12] дает наиболее полное описание динамики неоднородной среды так как для каждой компоненты решения полная гидродинамическая система уравнений динамики, в которой проводится учет межкомпонентного скоростного скольжения и межкомпонентного обмена энергией.

В настоящей статье с помощью континуальной методики математического моделирования гидродинамики неоднородных сред разработана математическая модель динамики газа в канале с волокнистым наполнителем. Исследование предполагает расчет ударноволнового газового течения с учетом сопротивления дисперсного каркаса и теплообмена между материалом дисперсного каркаса и движущимся газом.

Плотность частиц в газозвеси или волокнистого наполнителя –  $\rho_{10}=2500 \text{ кг/м}^3$ , диаметр частиц или толщина волокон волокнистой среды –  $d=2 \text{ мкм}$ , начальное объемное содержание дисперсной фазы газозвеси и волокнистой среды –  $\alpha_0=0.001$ . Длина канала –  $L=1 \text{ м}$ , ширина канала –  $h=0.1 \text{ м}$ . Сеточное разбиение области –  $N_x=200$  в направлении  $x$  и  $N_y=40$  в направлении  $y$ . Моделировалась работа так называемой «ударной трубы» [1]. В области равновесного давления расположена неоднородная среда, тогда как область повышенного давления заполнена однородным газом – рис.1. Дисперсная фаза либо газозвесь – взвешенные в газе твердые частицы, либо волокна твердого материала. Повышенное давление газа составляет –  $p_2=123,2 \text{ кПа}$ , тогда как равновесное давление газа –  $p_1=112 \text{ кПа}$ . Компоненты смеси имеют начальную температуру –  $T_0=T_{10}=293 \text{ К}$ . Начальная средняя плотность дисперсной компоненты:  $\rho_1(x,y)=\alpha_0\rho_{10}, x>L/4; \rho_1(x,y)=0, x\leq L/4$ .

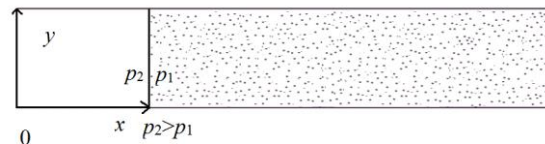


Рис.1 Общая схема моделируемого процесса

На рис. 2 представлено распределение давления газа в продольном направлении в начальный момент времени, интенсивность начального перепада давления –  $p_2/p_1=1.1$ . В последующие моменты времени распад начального разрыва давления газа формирует одиночную ударную волну малой интенсивности.

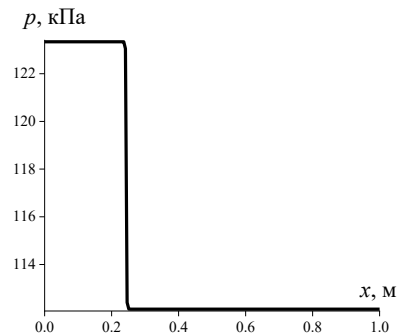


Рис.2 Начальное распределение давления

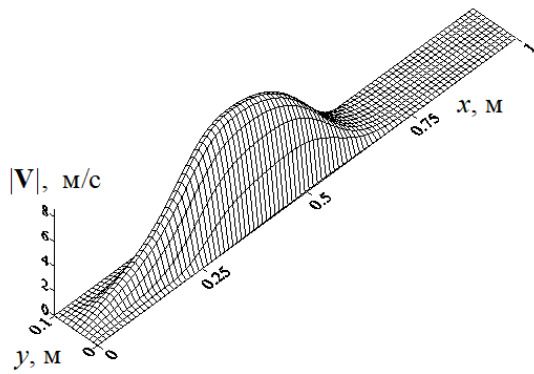
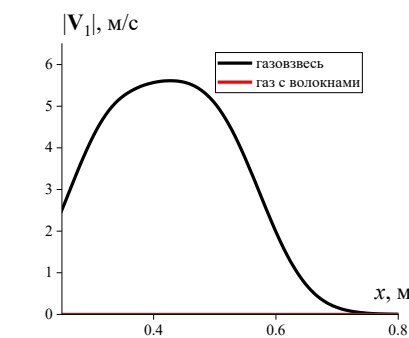
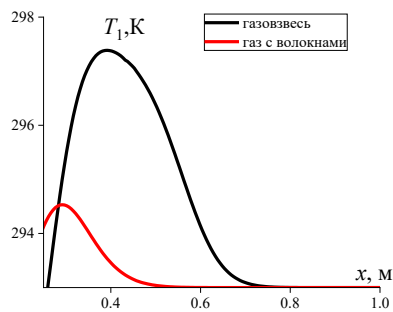


Рис.3 Модуль скорости несущей среды газозвеси



а



б

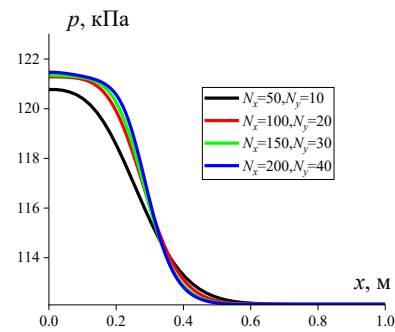
Рис.4 Пространственное распределение модуля скорости рис.4,а и температуры – рис.4,б дисперсной фазы для различных моделей неоднородных сред в продольном направлении

Математическая модель, основанная на решении уравнения Навье-Стокса [1], позволяет учесть пристеночную вязкость в канале при движении несущей среды газозвеси – рис.3.

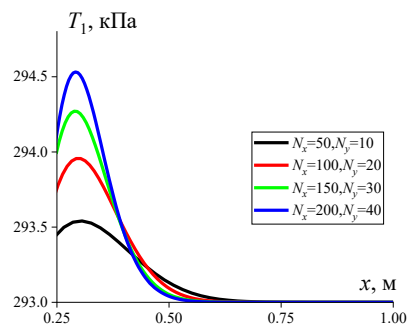
Особенностью математической модели газа с волокнами является то, что дисперсная компонента смеси неподвижна – рис.4, а. В модели газа с волокнами учитывается теплообмен между несущей средой и дисперсной фазой, в процессе движения ударной волны вдоль направления распространения ударной волны происходит изменение температуры волокнистой

среды, при этом за счет отсутствия конвективных слагаемых в уравнении (13) интенсивность изменения температуры имеет меньшее значение, чем в газозвеси –рис.4,б.

Исследование сеточной сходимости математической модели динамики газозвеси разработанной в рамках континуальной методики моделирования течений неоднородных сред представлено в работе [10]. Для исследования сеточной сходимости модели динамики газа с волокнами были проведены численные расчеты на вложенной последовательности конечно-разностных разбиений физической области. Было определено, что при измельчении конечно-разностной сетки уменьшаются различия между рассчитанными параметрами динамики газа и дисперсной компоненты, в частности давления газа и температуры дисперсной фазы – рис.5,а,б. Так для конечно-разностных разбиений  $\{N_x=50, N_y=10\}, \{N_x=100, N_y=20\}, \{N_x=150, N_y=30\}, \{N_x=200, N_y=40\}$  максимальные значения температуры дисперсной фазы в момент времени  $t=1.7$  мс составляют соответственно  $T_{1max}=293.5$  К,  $T_{1max}=293.95$  К,  $T_{1max}=293.25$  К,  $T_{1max}=294.5$  К.



а



б

Рис.5 Пространственное распределение давления несущей среды – рис.5,а и температуры дисперсной фазы – рис.5,б дисперсной фазы полученные расчетами в рамках модели газа с волокнами на последовательности конечно-разностных разбиений расчетной области.

*Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.*

### Список литературы

- [1] Лоицянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва: Дрофа; 2003. 784 с.
- [2] Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. Москва: Наука; 1978. 336с.
- [3] Киселев С.П., Руев Г.А., Трунев А.П., Фомин В.М., Шавалеев М.Ш. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: «Наука»; 1992. 261с.
- [4] Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург.: Недра; 2003. 284 с.
- [5] Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газозвезях частиц металлов. Новосибирск: Параллель. 2015. 301 с.
- [6] Клиначева Н.Л., Ковалев Ю.М. Ослабление сферических ударных волн в гетерогенных средах//Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 4. С. 35-45.
- [7] Назаров У.А. Прерывание распространения детонационных волн в газозвезях унитарного топлива слоем неоднородных инертных частиц. //Физика горения и взрыва. 2021. Т.57. №6. С.:65–76.
- [8] Тукмаков Д.А. Численное моделирование движения и отражения ударных волн высокой интенсивности в неоднородной среде// Физика и техника высоких давлений, 2019, №4, С. 18-26.
- [9] Тукмаков Д.А. Численное моделирование обтекания пластины потоком электрически заряженной двухфазной среды // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2019. – № 1. С.1-12.
- [10] Tukmakov D.A. Investigation of the grid convergence of a finite-difference model of the dynamics of an electrically charged gas suspension//2024 6th International Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE) <https://doi.org/10.1109/REEPE60449.2024.10479689>
- [11] Тукмаков Д.А. Численное исследование распространения ударной волны из однородного газа в газозвезь с периодическим распределением дисперсной фазы//Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2024. №1. С.16 –28.
- [12]Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния коагуляции на динамику двухфракционной газозвези// Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2024. Т. 17. №4. С. 66-81.
- [13] Флетчер К Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. Москва: Мир; 1991. 551 с.
- [14] Ковеня В.М. Тарнавский Г.А., Черный С.Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука; 1990. 247 с.
- [15] Музафаров И.Ф., Утюжников С.В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа.// Математическое моделирование. 1993. Т.5. №3. С.:74-83.
- [16] Тукмаков А.Л. Хаотические колебания аэроупругой системы с синхронизацией при противофазном возбуждении. // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44. № 6. С.: 49-55.

## Гидродинамический эксперимент и численное моделирование в микрофлюидной системе «почка-на-чипе»

Тухватуллин Р.И. <sup>\*,\*\*</sup>, Рахимов А.А. <sup>\*</sup>, Саметов С.П. <sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

<sup>\*\*</sup>ФГБОУ ВО «Башкирский государственный медицинский университет» Минздрава России, Уфа

Моделирование физиологических процессов на микрофлюидных чипах (орган-на-чипе) является перспективным направлением биомедицины. Исследование функций проксимальных канальцев нефрона на таких чипах открывает новые возможности для доклинического тестирования нефротоксичных препаратов и изучения механизмов заболеваний почек [1]. Однако для корректного культивирования клеток и воспроизведения физиологических условий необходима точная характеристика гидродинамических параметров внутри чипа. Цель данной работы – создание и валидация численной модели течения жидкости в микрофлюидном чипе на основе экспериментальных данных расхода и давления для последующего использования в биологических экспериментах.

Микрофлюидный чип изготавливался методом мягкой литографии из полидиметилсилоксана [2]. Каналы прямоугольного поперечного сечения имели общую длину 15 мм, ширину 0,2 мм с расширяющейся центральной рабочей частью длиной 5 мм и шириной 1 мм. Высота каналов (около 40 мкм) повторяла параметры проксимального канальца [1]. Мембрана имела толщину 50 мкм, поры диаметром 10 мкм и плотность 625 пор/мм<sup>2</sup>. Экспериментальный стенд включал систему подачи дистиллированной воды (вязкость 1 мПа·с, плотность 1000 кг/м<sup>3</sup>), в котором перепад давления задавался компрессором и контролировался контроллером давления Elveflow OB1. Регистрация параметров потока (давление и расход) осуществлялась в реальном времени с использованием прецизионных датчиков Elveflow (MPS и MFS). Численное моделирование выполнялось в среде COMSOL Multiphysics с использованием модуля «Microfluidics» [3,4]. Модель решала уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости с физическими свойствами, соответствующими эксперименту. Граничные условия задавались на основе экспериментальных данных давления на входе.

В ходе эксперимента получены зависимости объемного расхода  $Q$  от времени при фиксированных значениях перепада давления  $\Delta P$  в

диапазоне от 0,5 до 20 кПа (0,5; 1; 2,5; 5; 10; 15 и 20 кПа). Наблюдалась стабилизация потока после выхода системы на стационарный режим. Экспериментальные значения расхода составили от 1,7 мкл/мин (0,5 кПа) до 49,24 мкл/мин (20 кПа). При численном моделировании для тех же значений перепада давления расход составил от 2,1 до 51,1 мкл/мин соответственно, средний арифметический расход – 22,3 мкл/мин. На основе полученных данных построена зависимость  $Q(\Delta P)$ . Сравнение экспериментальных кривых с результатами моделирования показало высокую степень соответствия: коэффициент корреляции Пирсона составил 0,96. В результате моделирования также получены поля скоростей и распределения давления внутри канала: средняя арифметическая скорость составила  $6,15 \cdot 10^{-3}$  м/с, достигая  $1,4 \cdot 10^{-2}$  м/с при 20 кПа.

Создана экспериментальная установка для физического моделирования микрофлюидного чипа проксимального канальца нефрона и проведено сравнение его гидродинамических характеристик с численной моделью. Высокая степень соответствия  $R^2 > 0,96$  экспериментальных и численных данных подтверждает адекватность разработанной модели. Модель позволяет прогнозировать гидродинамические параметры (поля скоростей и давлений) для данной геометрии каналов, что является важным и необходимым этапом перед проведением экспериментов с клеточными культурами и при моделировании более сложных физиологических условий.

### Список литературы

- [1] Cheng M. et al. Protocol to develop a proximal tubule-on-chip model based on hiPSC-derived kidney organoids for functional analysis of renal transporters // STAR Protocols. 2025. Vol. 6, No. 2, 103777.
- [2] Razaghian A., Nelson M.D., Gale B.K. Computational fluid structure interaction of novel mSLA 3D printed lung-on-a-chip microdevice // Bulletin of the American Physical Society. 2025.
- [3] Ataie S., Mehrizi A.A. Effect of side channel configuration of a T-junction on droplet generation: A computational study // 2024 11th Iranian Conference on Biomedical Engineering (ICBME), IEEE. 2025.
- [4] Bhatia S.N., Ingber D.E. Microfluidic organs-on-chips // Nature Biotechnology. 2014. Vol. 32, No. 8. P. 760-772.

## Граничная обратная задача для стержня с продольным надрезом

Утяшев И.М. <sup>\*,\*\*</sup>, Фатхелисламов А.Ф. <sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

<sup>\*\*</sup> Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Элементы конструкций, такие как стержни, балки и штанги, находят широкое применение в машиностроении, авиационной и строительной отраслях. В процессе эксплуатации под воздействием вибраций, нагрузки, износа в них могут возникать различные типы дефектов, включая коррозию, трещины различной ориентации и деформации. Так как дефекты могут привести к негативным последствиям, то своевременное обнаружение их является актуальной задачей. В обзорной работе А.М. Ахтямова [1] представлен анализ исследований, направленных на идентификацию дефектов в распределенных механических системах с использованием спектров собственных частот, а также характеристик проходящих и отраженных волн. В работе [2] представлено сравнение результатов расчетов по нескольким теоретическим моделям продольных колебаний стержня с экспериментальными данными; показано, что модель Бишопа, учитывающая наибольшее число факторов, не обеспечивает наивысшей точности. Обратные задачи определения параметров продольных трещин по собственным частотам колебаний рассматриваются в [3].

Настоящая работа направлена на определение геометрических параметров продольной трещины и граничного условия на правом конце стержня на основе конечного набора собственных частот продольных колебаний.

Рассматривается однородный изотропный стержень прямоугольного поперечного сечения длиной  $L=1$ , плотностью  $\rho$  и площадью поперечного сечения  $F$ . Стержень содержит продольную трещину длиной  $l$ , которая распространяется не по всей длине, а на интервале от некоторой точки  $x_c$  до правого торца (рис. 1). С математической точки зрения рассматривается модель, где стержень является составным, где участок без трещины обозначается индексом  $m$ , участок с трещиной — индексом  $p$ . Предполагается, что главные центральные оси поперечных сечений ука-

занных участков совпадают. Граничное условие на левом конце – жесткое, а условие закрепления на правом конце требуется определить. Геометрические характеристики поперечного сечения: высота  $H$  и ширина  $B$ . Трещина имеет форму прямоугольного паза с глубиной  $h$  и шириной  $b$ , а протяженность трещины  $l$  вдоль длины стержня является неизвестной.

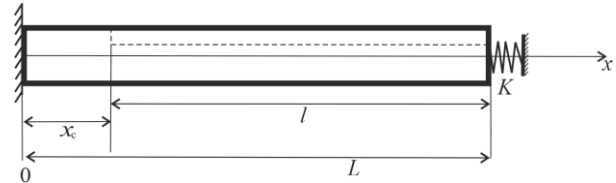


Рис. 1. Стержень с упругим закреплением на правом конце

Продольные колебания стержня с постоянным поперечным сечением описывается уравнением

$$-EF \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 U}{dt^2} = 0,$$

где  $U=U(x,t)$  – продольное смещение,  $E$  – модуль упругости. Так как от точки  $x_c$  до правого конца имеется продольная трещина, тогда стержень слева и справа от этой точки имеет разную форму и площадь поперечного сечения, и для каждого участка это уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} -EF_m \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} + \rho F_m \frac{\partial^2 U_m}{dt^2} &= 0, \\ -EF_p \frac{\partial^2 U_p}{\partial x^2} + \rho F_p \frac{\partial^2 U_p}{dt^2} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $U_m, U_p$  – продольные смещения левее и правее от точки  $x_c$ .  $F_p = BH - bh$ ,  $F_m = BH$  площади поперечных сечений соответствующих участков.

В месте соединения участков стержня применим условия сопряжения:

$$U_m(x_c) = U_p(x_c), \quad U'_m(x_c) = U'_p(x_c)P, \tag{2}$$

здесь  $P=F_p/F_m$ .

Так как левый конец заделан жестко:

$$U_m(0,t) = 0. \tag{3}$$

Так как на правом конце закрепление неизвестно, то можем представить его в виде

$$a_{21} \cdot U'_p(L) + a_{22} \cdot U_p(L) = 0, \quad (4)$$

Если предположить, что  $a_{21} = 0$ , то получим жесткое закрепление, если  $a_{22} = 0$ , то – свободное. В случае, когда оба коэффициента не равны нулю, то получаем упругое закрепление (см. Рис. 1) с жесткостью пружины  $K = a_{22}/a_{21}$ .

Решение уравнений (1) будем искать в виде  $U(x, t) = u(x)\cos\omega t$ . Тогда (1)-(4) сводится к следующей задаче Штурма-Лиувилля:

$$u''_m + \lambda^2 u_m = 0, \quad u''_p + \lambda^2 u_p = 0, \quad (5)$$

$$u_m(0) = 0, \quad a_{21}u'_p(1) + a_{22} \cdot u_p(1) = 0, \quad (6)$$

$$u_m(x_c) = u_p(x_c), \quad u'_m(x_c) = u'_p(x_c)P, \quad (7)$$

здесь  $\lambda^2 = \frac{\rho F \omega^2}{E}$  – спектральный параметр.

Общее решение задачи (5)–(7) будем искать в виде

$$u_m = C_{m1} \cos \lambda x + C_{m2} \frac{\sin \lambda x}{\lambda}, \quad (8)$$

$$u_p = C_{p1} \cos \lambda x + C_{p2} \frac{\sin \lambda x}{\lambda}.$$

Подставив (8) в (6), (7) приходим к системе уравнений относительно неизвестных констант  $C_{mi}$  и  $C_{pi}$  ( $i=1,2$ ), откуда приходим к характеристическому уравнению

$$D(\lambda) = (a_{22} \cos(\lambda L) - \lambda a_{21} \sin(\lambda L)) \cdot \left( \frac{\sin(\lambda x_c) \cdot \cos(\lambda x_c)}{\lambda} \right) (1 - P) + (a_{21} \cos(\lambda L) + a_{22} \frac{\sin(\lambda L)}{\lambda}) \cdot (P \cdot \sin^2(\lambda x_c) + \cos^2(\lambda x_c)) = 0. \quad (9)$$

Для нахождения трех неизвестных ( $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $l$ ) подставим три собственных значения ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ) в (9). Получим систему из 3-х уравнений для нахождения неизвестных параметров.

Моделирование неизвестного закрепление в виде (4), а также рассмотрение стержня как составного с условиями сопряжения (2) позволил решить обратную задачу по определению длины паза и граничных условий одного из концов стержня по конечному набору собственных значений.

### Список литературы

- [1] Ахтямов, А.М., Ильгамов М.А. Обзор исследований по идентификации локальных дефектов стержней // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 3–15.
- [2] Попов А.Л., Садовский С.А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным // Вестник Санкт Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8. № 2. С. 270–281
- [3] Утяшев И.М., Фатхелисламов А. Ф. Идентификация параметров стержня с продольным прямоугольным пазом по двум спектрам собственных частот изгибных колебаний // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т 28. № 2. С. 378–389.

## Динамика покрытой анизотропной оболочкой капли перфторуглерода

Федоров Ю.В.

Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

В последнее время большой интерес представляет изучение эмульсий с фазовыми переходами, обладающих следующей особенностью. Под действием ультразвука внутри капель жидкости образуются пузырьки пара. Этот процесс известен как акустическое испарение капель [1]. Использование данных эмульсий имеет огромный потенциал в биомедицине [2, 3], поскольку, в отличие от обычных газовых микропузырьков капли жидкости могут быть достаточно маленькими и могут спокойно протекать через тонкие капилляры. К примеру, при использовании эхографической визуализации капли жидкости, протекающие через сосудистую систему опухолей, могут испаряться и использоваться в качестве контрастных веществ для получения изображения внутренней структуры опухоли [4]. В качестве капель жидкости обычно используют капли перфторуглерода, такие как декафторбутан  $C_4F_{10}$ , октафторпропан  $C_3F_8$  и додекафторпентан  $C_5F_{12}$  [5, 6, 7]. Выбор данных веществ связан с тем, что они остаются метастабильными при физиологической температуре и не могут самопроизвольно испаряться. Для их испарения требуется акустическая энергия. В работе [8] приведены экспериментальные результаты по испарению капель октафторпропана и декафторбутана разных размеров, находящихся в воде. В случае полного испарения капли также были получены данные по радиальным колебаниям чистого пузырька пара. Получены экспериментальные данные по динамике парогазового пузырька внутри капли додекафторпентана [9]. Влияние концентрации газа на динамику акустических волн в смеси жидкости с парогазовыми пузырьками указано в работах [10, 11]. В той или иной постановке представлены исследования по акустическому испарению капель перфторуглерода [12, 13, 14, 15, 16, 17]. С остальными публикациями можно ознакомиться в обзорах [18, 19, 20]. В настоящей работе проведено численное моделирование роста и радиальных колебаний пузырька пара внутри капли перфторуглерода, покрытой анизотропной оболочкой.

На рис. 1 в частном случае приведено сравнение зависимости  $R_1(t)$ , полученной при испарении капли декафторбутана, находящейся в воде при следующих условиях:  $T_\infty = 310$  К,  $p_\infty = 10^5$  Па,  $R_{10} = 10^{-7}$  м,  $R_{20} = 2.2 \cdot 10^{-6}$  м,  $\mu_f = 0.007$  Па·с. При

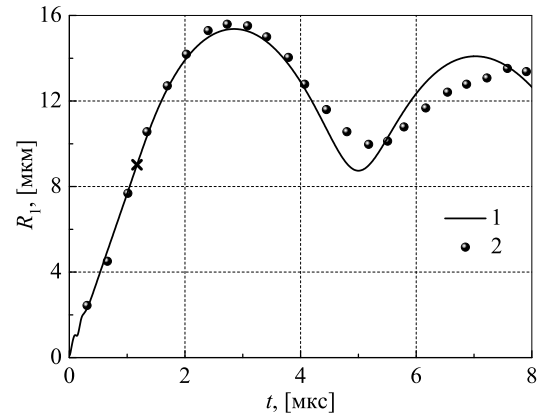


Рис. 1. Сравнение зависимости радиуса пузырька пара от времени (1) с экспериментальными данными [8] (2); крестиком показан момент полного испарения капли

выполнении условия  $R_1 = R_2$  (капля декафторбутана полностью испарилась) в расчетах полагалось, что массовый поток  $J = 0$ . Далее совершал радиальные колебания уже чистый пузырек пара. Таким образом, как видно из рис. 1, теория адекватно описывает экспериментальные данные во всем временном промежутке как до полного испарения капли, так и после.

Рассмотрим динамику покрытой анизотропной оболочкой капли декафторбутана в вязкой жидкости. Толщина оболочки капли  $d = 4 \cdot 10^{-9}$  м и модуль Юнга в радиальном направлении  $E_r = 88.8 \cdot 10^6$  Па. На рис. 2 приведены зависимости пузырька пара от времени при различных значениях модуля Юнга  $E_{||}$  в орторадиальном направлении. Остальные параметры те же, что и на рис. 1. Видно, что увеличение степени анизотропии оболочки капли приводит к замедлению роста парового пузырька, а также к уменьшению амплитуды его радиальных колебаний. С увеличением значения  $E_{||}$  время испарения капли увеличивается (рис. 3). К примеру, при  $E_{||} = 0.1 E_r$  время за которое испаряется капля составляет 1.19 мкс, а при  $E_{||} = 2 E_r$  время испарения увеличивается до 1.62 мкс. Данные выводы не противоречат результатам работы [21]: для степеней анизотропии 1, 2, 3 наименьший коэффициент затухания слабо-нелинейных волн

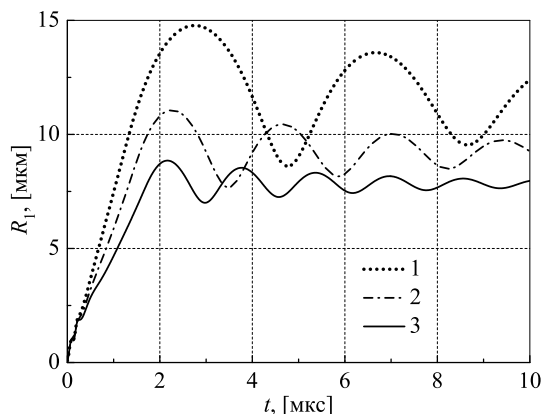


Рис. 2. Зависимости радиуса пузырька пара от времени при различных значениях  $E_{\parallel}$ :  $0.1E_r$  (1),  $E_r$  (2),  $2E_r$  (3)

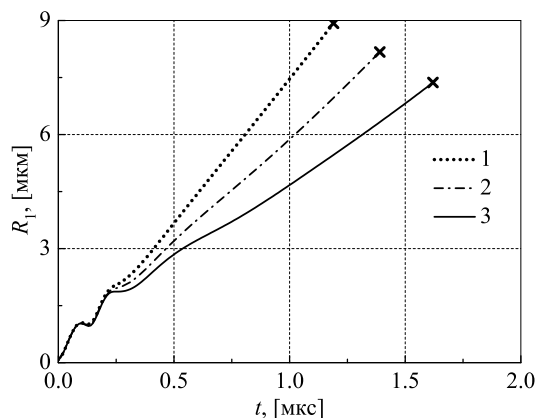


Рис. 3. Временные зависимости радиуса пузырька пара внутри капли при различных значениях  $E_{\parallel}$ :  $0.1E_r$  (1),  $E_r$  (2),  $2E_r$  (3); крестиком показан момент полного испарения капли

давления в пузырьковой жидкости наблюдается именно для анизотропного случая 3. Как следует из рис. 3, это обусловлено тем, что в этом случае оболочка сдерживает пульсации пузырьков, вследствие чего волна давления рассеивается менее существенно, чем в остальных случаях 1 и 2.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 25-21-00514), <https://rscf.ru/project/25-21-00514/>.

### Список литературы

[1] Kripfgans O.D., Fowlkes J.B., Miller D.L., Eldevik O.P., Carson P.L. Acoustic droplet vaporization for therapeutic and diagnostic applications // *Ultrasound Med. Biol.* 2000. Vol. 26. P. 1177–1189.

[2] Sheeran P.S., Dayton P.A. Phase-change contrast agents for imaging and therapy // *Curr. Pharm. Des.* 2012. Vol. 18. P. 2152–2165.

[3] Kee A.L.J., Teo B.M. Biomedical applications of acoustically responsive phase shift nanodroplets: current status and future directions // *Ultrason. Sonochem.* 2019. Vol. 56. P. 37–45.

[4] Rapoport N., Gao Z., Kennedy A. Multifunctional nanoparticles for combining ultrasonic tumor imaging and targeted chemotherapy // *J. Natl Cancer Inst.* 2007. Vol. 99. P. 1095–1106.

[5] Sheeran P.S., Wong V.P., Luois S., McFarland R.J., Ross W.D., Feingold S., Matsunaga T.O., Dayton P.A. Decafluorobutane as a phase-change contrast agent for low-energy extravascular ultrasonic imaging // *Ultrasound Med. Biol.* 2011. Vol. 37. P. 1518–1530.

[6] Sheeran P.S., Luois S., Dayton P.A., Matsunaga T.O. Formulation and acoustic studies of a new phase-shift agent for diagnostic and therapeutic ultrasound // *Langmuir.* 2011. Vol. 27. P. 10412–10420.

[7] Sheeran P.S., Luois S., Mullin L.B., Matsunaga T.O., Dayton P.A. Design of ultrasonically-activatable nanoparticles using low boiling point perfluorocarbons // *Biomaterials.* 2012. Vol. 33. P. 3262–3269.

[8] Doinikov A.A., Sheeran P.S., Bouakaz A., Dayton P.A. Vaporization dynamics of volatile perfluorocarbon droplets: a theoretical model and in vitro validation // *Medical Physics.* 2014. Vol. 41. 102901.

[9] Shpak O., Stricker L., Versluis M., Lohse D. The role of gas in ultrasonically driven vapor bubble growth // *Phys. Med. Biol.* 2013. Vol. 58. P. 2523–2535.

[10] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности устойчивости и акустических свойств перегретой жидкости с газовыми зародышами при повышении давления // *TBT.* 2019. Т. 57, № 5. С. 748–754.

[11] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения прохождения акустических волн на границе "чистой" и пузырьковой жидкостью при прямом их падении // *TBT.* 2019. Т. 57, № 2. С. 284–290.

[12] Cho S., Son G. A level set method for bubble growth in acoustic droplet vaporization // *Int. Communications in Heat and Mass Transfer.* 2018. Vol. 93. P. 83–92.

[13] Cho S., Son G. Numerical study of droplet vaporization under acoustic pulsing conditions // *J. Mech. Science. Technol.* 2019. Vol. 33. P. 1673–1680.

[14] Park S., Son G. Numerical investigation of acoustic vaporization threshold of microdroplets // *Ultrason. Sonochem.* 2021. Vol. 71. 105361.

[15] Rapoport N. Phase-shift, stimuli-responsive perfluorocarbon nanodroplets for drug delivery to cancer // *Wiley Interdiscip Rev Nanomed Nanobiotecol.* 2012. Vol. 4. P. 492–510.

[16] Guedra M., Coulouvrat F. A model for acoustic vaporization of encapsulated droplets // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2015. Vol. 138. P. 3656–3667.

[17] Lacour T., Brasier T., Coulouvrat F. Ultimate fate of a dynamical bubble/droplet system following acoustic vaporization // *Phys. Fluids.* 2020. Vol. 32. 051702.

[18] Prosperetti A. Vapor bubbles // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2017. Vol. 49. P. 221–248.

[19] Вараксин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // *TBT.* 2013. Т. 51, № 3. С. 421–455.

[20] Вараксин А.Ю. Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследования // *TBT.* 2020. Т. 58, № 4. С. 646–669.

[21] Kawahata R., Kanagawa T., Chabouh G. Nonlinear ultrasound propagation in liquid containing multiple microbubbles coated by shell incorporating anisotropy // *Phys. Fluids.* 2023. Vol. 35. 073312.

## Сильно диссипативные течения в пористых средах

Филиппов А.И., Зеленова М.А.

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак

Течения в сильно диссипативных системах недостаточно изучены [1] и представляют практический интерес в связи с приложениями в нефтедобыче, гидрогеологии [2, 3], а также в прикладной аэродинамике [4]. Основой этого направления послужили экспериментальные исследования инженера-гидравлика Анри Дарси [5], в результате которых экспериментально установлена линейная взаимосвязь между скоростью фильтрации и градиентом давления при одномерном диссипативном течении по трубе, получившее название закона Дарси. Широко известны научные дискуссии [6], итогом которых явились обобщающие работы М. Маскета [7, 8] и др., позволившие уточнить физические закономерности и привести закон к современной формулировке.

Важнейшую роль при диссипативных течениях играют силы, приводящие к превращению механической энергии в тепловую [1]. В связи с этим анализ этих сил очень важен для уточнения физических закономерностей диссипативных течений. Важным примером сильно диссипативных течений является фильтрация нефти и газа в природных коллекторах. Однако даже в современных работах не ставится вопрос об оценке их влияния на процессы течения [9, 10]. Более того, в работе [10] постулируется сопоставление закона фильтрации Дарси с уравнением Навье–Стокса в предположении, что вязкость фильтрующейся среды пренебрежимо мала.

Здесь предпринята попытка построения выражения для диссипативных сил, которое позволило бы создать новые подходы к исследованию процесса фильтрации.

Согласно основному фундаментальному закону классической гидродинамики, поле ускорения в текущей жидкости определяется градиентом давления, внешними массовыми полями (чаще всего гравитационное поле  $g$ ) и диссипативными силами

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P + \vec{g} + \vec{R}. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{R}$  – диссипативная сила, отнесённая к единице массы.

Леонард Эйлер в 1752 году построил это уравнение без учёта силы трения. Его главное достижение заключалось в том, что он явно представил вклад пространственного ускорения. Математически это заключается в представлении полной производной в виде суммы  $\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w}\nabla)\vec{w}$ . Представленное им

уточнение оказалось настолько существенным, что уравнение (1) при  $\vec{R} = 0$  ныне известно как уравнение Эйлера.

Соответствующее уравнение, учитывающее силу трения

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w}\nabla)\vec{w} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P + \vec{g} + \vec{R}, \quad (2)$$

получило название Эйлера–Жуковского.

При течении реальных жидкостей между слоями, при наличии градиентов координат вектора скорости, возникают силы трения, величина которой существенно зависит от значений градиентов. При малых градиентах сила внутреннего трения обращается в ноль. Такими свойствами обладают безградиентные течения, при описании которых используется уравнения Эйлера.

Раздел гидродинамики, который учитывает силу внутреннего трения, базируется на уравнении Навье–Стокса, в котором сила трения выражена через координаты градиента скорости. Отметим, что уравнение Навье–Стокса применимо при относительно малых величинах градиента скорости. На практике возникает необходимость изучения течений с высокими значениями градиента скорости. Силы внутреннего трения в таких системах являются преобладающими, а их описание требует дальнейшего развития математического аппарата.

Среди течений с высокими градиентами скорости выделяются сильно диссипативные системы, для которых можно использовать усреднённые по физически малым объёмам уравнения [1]. Для описания течения в сильно диссипативных системах такого рода используется понятие скорости фильтрации, координаты которой определяются как отношение объёмного расхода на площадь поперечного сечения. Усреднение по физически малому объёму позволяет представить поле скорости фильтрации зависящим также от пространственной координаты макроскопического объёма пористой среды  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ .

Для упрощения описания предполагается, что сила трения зависит от скорости фильтрации  $\vec{R} = \vec{R}(\vec{v})$ . Использование этой гипотезы предполагает построение явной зависимости силы трения от скорости. Наиболее простым путём построения этой зависимости является использование разложения в ряд Маклорена, поскольку при отсутствии фильтрации  $\vec{v} =$

0, сила трения равна нулю, то нулевое слагаемое в разложении в ряд Маклорена отсутствует. Первое слагаемое в разложении выражается в тензорном виде

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -(A)\vec{v}.$$

Компоненты тензора диссипативной силы (A) представляются производными  $\alpha_{ij} = -\frac{\partial R_i}{\partial v_j}(v=0)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Вид тензора зависит от структуры пористой среды и выбора системы координат.

Для сред с регулярной хаотической структурой порового пространства тензор (A) представляется в диагональном виде с одинаковыми компонентами на главной оси  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha$  ( $\alpha_{ij}$  при  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ). Здесь  $\alpha$  – главная компонента тензора диссипативной силы. Таким образом, для пористых сред с регулярным хаотическим строением порового пространства в первом приближении справедлива линейная взаимосвязь между силой трения и скоростью фильтрации

$$\vec{R} = -\alpha\vec{v}.$$

При больших скоростях фильтрации возникает необходимость учёта слагаемых более высокого порядка в разложении Маклорена. Следующее слагаемое разложения первой координаты диссипативной силы по вектору скорости представляется в виде тензора третьего ранга  $R_{1i} = -\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \beta_{ijk} v_j v_k$ , где  $\beta_{ijk} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial v_j \partial v_k}(i, k = 1, 2, 3)$ . Для прямоугольной декартовой системы координат в случае, когда среда является изотропной, т.е. отличные от нуля компоненты тензора совпадают  $\beta_x = \beta_{x11} = \beta_{x22} = \beta_{x33}$ , а остальные компоненты тензора с первым индексом  $x$  равны нулю, выражение для  $x$ -координаты силы представится как

$$\begin{aligned} R_{1x} &= - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \beta_{xjk} v_j v_k = -\beta_x (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \\ &= -\beta_x v^2. \end{aligned}$$

Аналогично для остальных координат силы получим  $R_{1y} = -\beta_y v^2$ ,  $R_{1z} = -\beta_z v^2$ . Выражение для результирующей силы в этом случае запишется в виде

$$\vec{R}_1 = -(\beta_x \vec{i} + \beta_y \vec{j} + \beta_z \vec{k})v^2.$$

Рассмотрим случай, когда сила  $\vec{R}_1$  также направлена противоположно вектору скорости, т.е.

$$\beta_x \vec{i} + \beta_y \vec{j} + \beta_z \vec{k} = \beta \frac{\vec{v}}{v}.$$

Отсюда находим выражение для  $\beta$ , которое запишется как

$$\beta = \frac{\beta_x v_x + \beta_y v_y + \beta_z v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Выражение для второго порядка разложения силы трения по вектору скорости представится в виде

$$\vec{R}_1 = -\beta \frac{\vec{v}}{v} v^2 = -\beta v \vec{v}.$$

Результирующую диссипативную силу с учётом первого и второго порядков разложения для случая изотропной среды ( $\beta_x = \beta_y = \beta_z$ ) запишем как

$$\vec{R} = -\alpha\vec{v} - \beta v \vec{v} = -(\alpha - \beta v)\vec{v}.$$

Сопоставление полученного выражения для силы трения с экспериментальным законом Дарси позволяет определить только выражение для  $\alpha$ . Поэтому далее рассмотрим случай малых скоростей, где второе слагаемое пренебрежимо мало  $\beta v \ll \alpha$ . Для нахождения неизвестного коэффициента  $\alpha$  подставим полученное выражение в уравнение Эйлера–Жуковского

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P + \vec{g} - \alpha\vec{v}. \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет обобщение классического закона Дарси на нестационарные течения в сильно диссипативных системах, если в качестве диссипативной силы выбрать выражение

$$\vec{R} = -\frac{\mu}{\rho k} \vec{v} = -\frac{\mu m}{\rho k} \vec{w}. \quad (5)$$

Уравнение (3) приводит к классическому закону Дарси при малых скоростях, если  $\frac{d\vec{w}}{dt} = 0$  и  $\alpha = \frac{\mu}{\rho k}$ .

На основе сопоставления полученного нестационарного уравнения для скоростей фильтрации с классическим законом Дарси найдена зависимость диссипативной силы от вязкости фильтрующейся жидкости и проницаемости пористой среды, а также установлена взаимосвязь главной компоненты тензора диссипативной силы с этими величинами. Показано, что вклад акселерационной составляющей градиента давления при радиальном течении пропорционален квадрату скорости фильтрации и не зависит от проницаемости. Получено уточнённое выражение для закона Дарси при радиальной фильтрации в сильно диссипативной среде с учётом акселерационной составляющей. Установлено, что при малых градиентах давления уточнённый закон Дарси согласуется с его классическим выражением.

## Список литературы

- [1] Филиппов А.И., Спиридонова Н.А. Неравновесные эффекты в сильно диссипативных термодинамических системах // Известия вузов. Физика. – 2021. – Т. 64. – № 3 (760). – С. 148–160. DOI: 10.17223/00213411/64/3/148. EDN: DTGNKH
- [2] Толпаев В.А., Евенко И.А., Харченко Ю.В. Фильтрационные испытания тампонажного состава ГПТС // Нефтепромысловое дело. – 2008. – № 5. – С. 26–34. EDN: IAXMMD
- [3] Плеханов В.Н. Обзор исследований, посвященных отклонениям от линейного закона Дарси // Вестник науки. – 2020. – Т. 4. – № 5 (26). – С. 195–198. EDN: AXYZYQ
- [4] Байгалиев Б.Е., Тумаков А.Г., Тумаков Е.А. Особенности применения закона Дарси при исследовании и разработках лопаток гибридного двигателя для перспективного воздушно-космического самолёта // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). – 2014. – № 5–4 (47). – С. 41–50. EDN: UGKRBP
- [5] Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. – Dalmont, Paris: Hachette Livre Bnf, 1856. – 657 p.
- [6] Simmons T. Henry Darcy (1803–1858): Immortalised by his scientific legac // Hydrogeology Journal. – 2008. – No. 16. – P. 1023–1038. DOI: 10.1007/s10040-008-0304-3.
- [7] Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media: analogies with other physical problems. – New York, London: Mcgraw-Hill book company, 1937. – XIX, 763 p. ISBN 978-0934634168.
- [8] Muskat M., Botset H. G. Flow of gas through porous materials // Physics. – 1931. No. 1 (1). – P. 27–47. DOI:10.1063/1.1744983.
- [9] Коленкина Е. И., Никитин В. Ф., Логвинов О. А., Смирнов Н.Н. Фильтрационные течения в пористых средах. Монография. – Москва: Изд-во ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2020 – 73 с.
- [10] Shifrin E.G., Gusev N.A. Filtration equations and the Darcy law // Doklady Physics. – 2010. – Vol. 55. – No. 12. – P. 615–619. DOI: 10.1134/S1028335810120074.
- [11] Шифрин Э.Г., Гусев Н.А. // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 435. – № 5. – С. 619–623. EDN: NCAVRB

## Равновесие участка трубопровода при подъеме

Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В [1] исследуется линейный изгиб трубопровода, для подъема которого приложена сосредоточенная сила. Задача решена с учетом веса трубопровода вместе со средой в трубопроводе, выталкивающей силы Архимеда, нормальных боковых распределенных сил, зависящих от давлений на внутреннюю и внешнюю поверхности. В [2] рассматривается изгиб обетонированного трубопровода большой длины при подъеме его участка до свободной поверхности водоема.

Рассматривается равновесие участка трубопровода при его подъеме до свободной поверхности водоема. Начальное положение трубопровода на горизонтальном основании является прямолинейным. Его статический изгиб происходит под действием собственного веса, подъемной силы воды, действия нормальной боковой силы. С учетом большого отношения длины трубопровода к глу-

бине водоема используется нелинейное уравнение изгиба. Определяется подъемная сила для заданной длины поднимаемого участка трубопровода.

Получен численный метод решения задачи. Учет действия нормальной распределенной силы приводит к незначительному изменению формы трубопровода. Дается сравнение решения задачи Коши методом Рунге-Кутты с расчетами по конечно-разностным формулам.

Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (FMRS-2023-0015).

### Список литературы

- [1] Ильгамов М.А. Всплытие подводного газового трубопровода // Известия РАН. Механика твердого тела. 2023. № 2. С. 147–159. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600487>
- [2] Ильгамов М.А. Изгиб подводного трубопровода при подъеме // Известия РАН. Механика твердого тела. 2025. № 3. С. 23–37. <https://doi.org/10.31857/S1026351925030023>

## Основы описания энергетики, динамики и структуры макро- и микротечений жидкостей и газов

Чашечкин Ю.Д.

Институт проблем механики и им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Необходимость выбора гипотезы постоянной плотности при выводе уравнений движения сплошной несжимаемой среды, выразительно обоснованная Стоком в основополагающей статье: «As it is quite useless to consider cases of the utmost degree of generality, I shall suppose the fluid to be homogeneous...» («Поскольку совершенно бесполезно рассматривать случаи крайней степени общности, я предположу, что жидкость однородна...»), продолжает действовать и сегодня [1]. Обилие моделей отдельных видов течений, вихрей и волн с неприводимыми системами уравнений привело к необходимости дополнения правил логики научных исследований Аристотеля–Оккама–Декарта–Лейбница–Максвелла–Менделеева принципом определмости базовых понятий и правил операций [2]. За основу описания течений жидкостей и газов выбирается система фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей – дифференциальная форма законов сохранения плотности, вещества, импульса и энергии [1,2], которая замыкается уравнениями состояния для плотности и термодинамического потенциала. По рекомендации International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS) [3]), в качестве базового термодинамического параметра выбран потенциал Гиббса, который определяется составом среды и условиями опытов – значениями давления, температуры, концентрации веществ.

Включение в описание течений потенциала Гиббса в качестве уравнения состояния позволяет учитывать в расчетах течений влияние процессов конверсии потенциальной поверхностной энергии (ППЭ) – переход в другие формы – тепловую, возмущения давления, перераспределения концентрации, кинетическую энергию течений при уничтожении свободной поверхности, и, наоборот, локальное поглощение тепловой и кинетической энергии при образовании новой

свободной поверхности [2]. Анализ вариаций термодинамических потенциалов позволяет учитывать влияние различных механизмов переноса энергии на динамику течений и структуру среды. На практике учитывается и радиационный перенос энергии тепловым излучением, и макроскопический перенос с потоком, волнами и вихрями, и микроскопический – диссипативный и конверсионный.

Современные инструменты позволяют идентифицировать в картине распределения термодинамических и других физических параметров жидкости отдельные ячейки, волокна, слои, оконтуренные оболочками с собственными физическими свойствами. Ячейки, которые находятся и на свободной поверхности, и в толще среды, составляют ассоциаты физической и химической природы – кластеры, клатраты, бонды, войды и др. Картина распределения термодинамических величин непрерывно перестраивается. Ее зрительный образ – фотографии Солнца.

При уничтожении свободной поверхности сливающихся жидкостей часть конвертируемой ППЭ – доступная потенциальная поверхностная энергия (ДППЭ) – переходит в кинетическую энергию наиболее тонких струек. В свою очередь формирование новых контактных поверхностей сопровождается локальным поглощением части тепловой и кинетической энергии, переходящей в ППЭ новых контактных поверхностей, появлением замедленных струек и тонких прослоек. Непрерывно образующиеся и затухающие тонкие течения обеспечивают текучесть жидкостей и газов – нулевое трение покоя.

В силу сложности системы фундаментальных уравнений полный анализ ее свойств до настоящего времени не закончен. На практике используются редуцированные системы, сохраняющие важные свойства реальных сред – гетерогенность, диссипативность, стратифицированность,

внутреннюю микро- и макроструктуру. Теоретический анализ редуцированной системы проводится методами объединенной теории возмущений, включающей поиск и регулярных решений, описывающих волны различных типов, и сопутствующих лигаментов, которые отыскиваются методами теории сингулярных возмущений [4]. При этом частота процесса – мера энергии, считается вещественной, положительно определенной величиной, а волновое число – комплексным [4].

В редуцированных системах уравнений естественно выделяется ряд масштабов – и больших, по сравнению с размером источника или длиной волны, которую возбуждает источник, движущийся источник, таких как масштаб плавучести, и более коротких масштабов, включающих малые диссипативные коэффициенты.

Собственные временные и пространственные масштабы задачи определяют ключевые требования к методике опытов и программам расчетов в части выбора размеров области наблюдения или счета, чувствительности, временного и пространственного разрешения инструментов, позволяющих регистрировать все компоненты течений.

Проведенные расчеты и опыты по изучению периодических и капельных течений показали, что регулярные решения редуцированных фундаментальных уравнений описывают волны, а семейства сингулярных решений – лигаменты, размеры которых определяются масштабами Стокса и их аналогами в движущейся среде. В опытах лигаментам соответствуют волокна и высокоградиентные прослойки, ограничивающие области распространения волновых пакетов и

формирующих возникающую тонкую структуру в непрерывно стратифицированных жидкостях.

Приводятся иллюстрирующие примеры теменной визуализации регулярных волновых и сингулярных компонентов стратифицированных течений в лабораторных условиях и примеры наблюдений в природных условиях. Тонкие компоненты течений – лигаменты играют важную роль в формировании и эволюции тонких структур капельных течений, наблюдающихся в импактном режиме растекания капель смешивающихся жидкостей, когда кинетическая энергия капель существенно превышает потенциальную поверхностную энергию [5].

Выполненные расчеты периодических течений, позволяющие проанализировать зависимость параметров и регулярных компонентов полных решений – поверхностных и внутренних волн и сингулярных компонентов – лигаментов в линейном и слабо нелинейном приближении, согласуются с данными независимо выполненными опытов с точностью в несколько процентов.

*Работа выполнена по Государственному заданию (номер госрегистрации 124012500442-3).*

#### Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [2] Chashechkin Yu.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021
- [3] Feistel R. Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean Sciences. 2018. V.4. P. 471–502.
- [4] Chashechkin, Y.D., Ochirov, A.A. Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // Mathematics. 2023., V. 11, 4443. <https://doi.org/10.3390/math11214443>
- [5] Чашечкин Ю.Д. Закономерности распределения вещества свободно падающей окрашенной капли в прозрачной принимающей жидкости (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 2025. № 1. С. 34–76.

## Особенности течения крови в микроканалах с тандемными стенозами: экспериментальное и численное исследование

Чепенко В.С., Рахимов А.А., Валиев А.А., Ахметов А.Т.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Локальные изменения гемодинамики при стенозах сосудов играют ключевую роль в развитии патологических процессов, включая дисфункцию эндотелия и тромбообразование [1, 2]. Несмотря на значительное количество работ, посвященных моделированию стенозов, экспериментальные данные о поведении эритроцитов в нестационарном потоке в области последовательных сужений остаются ограниченными. В настоящей работе представлены результаты комплексного экспериментального и численного анализа течения крови в микроканалах с двумя последовательными сужениями (тандемный стеноз) при различных расстояниях между ними.

Исследование выполнено на микрожидкостных устройствах из полидиметилсилоксана, изготовленных методом мягкой фотолитографии, аналогично работе [3]. Каналы имели ширину 1 мм, глубину 50 мкм, длину сужения 100 мкм, ширину сужения 50 мкм. Расстояние между сужениями составляло 200 и 500 мкм. Эксперименты проводили с цельной кровью здорового человека (антикоагулянт ЭДТА К3) при перепаде давления 500 Па. Регистрацию движения эритроцитов осуществляли с помощью высокоскоростной видеомикроскопии (1500 кадр/с). Численное моделирование выполнено в программном пакете Comsol Multiphysics с использованием неньютоновской модели крови (степенной закон Оствальда–де Вааля,  $k = 0,01 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $n = 0,80$ ), а также моделировалось движение частиц диаметром 8 мкм, имитирующих эритроциты.

При расстоянии между сужениями 200 мкм в экспериментах и численном моделировании наблюдалась характерная картина: после выхода из первого сужения поток быстро захватывался во второе сужение, при этом в промежутке формировалась овальная зона, полностью не занятая эритроцитами в пристеночных областях. Увеличение расстояния до 500 мкм приводило к расширению зоны охвата потока, заполнению промежутка между сужениями, однако угловые области оставались незанятыми. Численное моделирование распределения вязкости показало, что максимальные значения вязкости (до 50 мПа·с) локализуются вблизи верхней и нижней стенок канала в зоне между сужениями, что указывает на наличие областей с высоким сопро-

тивлением сдвигу. Особый интерес представляют явления, выявленные при изменении перепада давления. При снижении перепада давления до 100 Па в области между сужениями вдоль стенок начиналось образование монетных столбиков эритроцитов, характеризующихся отсутствием движения. Эта зона стагнации постепенно расширялась от стенок к центру, сохраняя подвижность лишь в центральной части потока. Последующее повышение перепада давления до исходных 500 Па приводило к постепенному вымыванию образовавшихся агрегатов плазмы; полное восстановление исходной картины течения занимало около 15 мин.

Геометрия тандемного стеноза (расстояние между сужениями) определяет характер перестройки потока в зоне между стенозами: при малом расстоянии между стенозами (200 мкм) формируется локальная зона, недоступная для эритроцитов, тогда как с её увеличением охват потока расширяется. В областях между сужениями вблизи стенок выявлены значительные градиенты вязкости, что свидетельствует о существенной неоднородности реологических условий, способных влиять на агрегацию форменных элементов. При снижении перепада давления в пространстве между сужениями возникает зона стагнации с формированием монетных столбиков эритроцитов, что может служить пусковым механизмом локального тромбообразования. Данный процесс обратим при восстановлении исходного давления. Комбинирование высокоскоростной видеомикроскопии и численного моделирования позволяет адекватно воспроизводить ключевые особенности гемодинамики в микроканалах со сложной геометрией и может быть использовано для оценки рисков тромботических осложнений при стенозах.

### Список литературы

- [1] Ахметов А.Т., Валиев А.А., Рахимов А.А., Саметов С.П., Хабидуллин Р.Р. Микрогидродинамика крови при стенозе сосудов // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. 2016. Том 11, №2, С. 210–217.
- [2] Rukhlenko O.S., Dudchenko O.A., Zlobina K.E., Guria G.Th. Mathematical modeling of intravascular blood coagulation under wall shear stress // PloS one. 2015. Vol.10, No.7, e0134028.
- [3] Рахимов А.А., Валиев А.А. Экспериментальное изучение особенностей течения крови в микроканалах со стенозом и бифуркациями с помощью разработанных микрожидкостных устройств // Письма в ЖТФ. 2025. Т. 51, № 18. С. 42–46.

## Теоретическое и экспериментальное исследование статического напряженно-деформированного состояния трубопровода и его опор

Шакирьянов М.М.\* , Ермоленко А.Н.\*\* , Ахмедьянов А.В.\*\* , Юлмухаметов А.А.\*

\* Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН А, Уфа

\*\* Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Теоретически и экспериментально исследовано равновесное напряженно-деформированное состояние участка медной трубы с двумя опорами, Оба конца трубы на опорах защемлены. Трубопровод с заключенной в нем несжимаемой жидкостью находится под действием сил гравитации и постоянного внутреннего давления [1-3]. Рассматриваются случаи абсолютно жестких и деформируемых деталей зажимных устройств опор. Неравномерное распределение массы трубопровода по длине, обусловленное закреплением на нем измерительных датчиков, определяется введением дельта-функции. Учитываются взаимодействия внутреннего давления и кривизны осевой линии, продольной и кольцевой деформаций трубы [4, 5]. Аппроксимацией функции прогиба и применением метода Бубнова-Галеркина дифференциальное уравнение статического изгиба трубопровода приводится к системе алгебраических равенств относительно неизвестных коэффициентов. Измерение продольных перемещений концов трубы при различных величинах внутреннего давления проводилось с помощью индикаторов. Дан сравнительный анализ

амплитуд прогибов средней точки пролета трубы, полученных с учетом и без учета продольных деформаций деталей опор.

*Работа выполнена на средства государственного бюджета по государственному заданию 123021200015-5(FMRS-2023-0015)*

### Список литературы

- [1] Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука. 1969. 180 с.
- [2] Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение. 1982. 280 с.
- [3] Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H.. Flutter and forced response of a canti-levered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. of Fluids and Structures. 1994. Vol. 8. P. 139–156.
- [4] Shakiryaynov M.M., Yulmukhametov A.A. Spatial Oscillations of a Pipeline on Vibrating Supports under the Action of Variable Internal Pressure // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Vol. 46, No. 5. P. 2251-2262.
- [5] Шакирьянов М.М., Юлмухаметов А.А. Влияние присоединенной массы транспортируемой газожидкостной среды на пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2025. № 1. С. 20-29.

## Модель балки на упругом основании с переменным коэффициентом постели

Юлмухаметов А.А.<sup>\*</sup>, Утяшев И.М.<sup>\*</sup>, Фатхелисламов А.Ф.<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

<sup>\*\*</sup> Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Балки на упругом основании широко применяются в современных инженерных конструкциях различного назначения. К таким балкам можно отнести шпалы железнодорожного пути, рельсы, водопропускные трубы, подводные тоннели на стадии их эксплуатации и т.п. В строительстве расчет многих типов фундаментов сводится к расчету балок на упругом основании. В машиностроении и различных других областях техники для многих конструкций в эксплуатационном режиме, находящихся в условиях сплошного контакта с другими изделиями, можно применить расчетную схему балки на упругом основании [1].

В данной работе исследуется модель однородной балки Эйлера-Бернулли конечной длины. Балка лежит на упругом основании с коэффициентом постели [2]. Концы балки принимаются свободными. Коэффициент постели моделируется в виде постоянной величины, в виде полинома первой степени и полинома второй степени. Цель данной работы заключается в определении переменного коэффициента постели по собственным значениям изгибных колебаний балки.

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний балки решается методом разделения переменных. Каждая из функций фундаментальной системы решения дифференциального уравнения строится в виде ряда Маклорена по продольной координате и спектральному параметру [3]. Благодаря данному подходу коэффициент постели, спектральный параметр и продольная

координата входят в частотное уравнение как компоненты бесконечного ряда. Разработан программный код в математическом пакете Maple, позволяющий строить частотное уравнение с заданным числом членов ряда.

В прямой задаче определены собственные значения изгибных колебаний балки для четырех моделей закона распределения упругости основания (постоянного, линейного, вогнутой и выпуклой парабол). Для каждого типа определены аналитические зависимости пяти собственных значений от параметра коэффициента постели. В обратной задаче по трем известным собственным значениям изгибных колебаний балок однозначно определен закон изменения коэффициента упругого основания. Показано, что относительная погрешность полученных результатов составляет менее 1% при точности входных данных не более  $10^{-11}$ .

*Работа выполнена на средства государственного бюджета по государственному заданию 123021200015-5(FMRS-2023-0015).*

### Список литературы

- [1] Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. Киев: Будивельник, 1967. 184 с.
- [2] Болотин В.В. (ред.). Вибрации в технике: справочник в 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение; 1978. 352 с.
- [3] Утяшев И.М., Аитбаева А.А., Юлмухаметов А.А. Определение закона изменения сечения стержня по собственным частотам колебаний // Известия Уфимского научного центра РАН. 2020. № 4. С. 19-24.

